

$\sqrt{\quad}$ π Σ x^2

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\int f(x) dx$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Maestro de Álgebra

De Principiante a Experto



Colibrí Editorial EGA

INTRODUCCIÓN

El álgebra es una de las ramas más fundamentales de las matemáticas. Su nombre proviene del árabe "al-jabr", que significa "la reunión de partes rotas". Fue introducida por el matemático persa Muhammad ibn Musa al-Juarismi en el siglo IX.

El álgebra estudia las reglas que rigen las operaciones y la relación entre cantidades que pueden representarse mediante símbolos. En esencia, el álgebra es el lenguaje universal de las matemáticas.

Este libro está diseñado para llevarte desde los conceptos más básicos hasta un nivel avanzado. Cada capítulo incluye:

- Teoría explicada de forma clara y sencilla
- Ejemplos resueltos paso a paso
- Ejercicios de práctica con sus soluciones
- Tips y consejos para resolver problemas

No importa si eres estudiante principiante o si buscas repasar conceptos, este libro te servirá como guía completa.

Para sacar el mayor provecho, te recomiendo:

1. Leer la teoría con atención
2. Estudiar cada ejemplo resuelto
3. Intentar resolver los ejercicios antes de ver las soluciones
4. Repetir los ejercicios hasta dominarlos

El álgebra es como aprender a tocar un instrumento: la práctica constante es la clave del éxito.

Manos a la obra.

CRÉDITOS

Maestro de Álgebra De principiante a experto

Colibrí Editorial EGA Primera edición, 2026

Edición, revisión y maquetación: Colibrí Editorial EGA. Contenido educativo original preparado para el aprendizaje autodidacta del álgebra.

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio sin autorización escrita de la editorial.

Este libro se vende como producto digital de Colibrí Editorial EGA.

ÍNDICE

PARTE I: FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA

- Capítulo 1: Los números y sus propiedades · pág. 10
- 1.1 Números naturales
- 1.2 Números enteros
- 1.3 Números racionales
- 1.4 Números irracionales
- 1.5 Números reales
- 1.6 Propiedades de la aritmética
- 1.7 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 2: Variables y expresiones algebraicas · pág. 17
- 2.1 Qué es una variable
- 2.2 Términos y coeficientes
- 2.3 Expresiones algebraicas
- 2.4 Términos semejantes
- 2.5 Propiedades de las operaciones con variables
- 2.6 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 3: Operaciones con polinomios · pág. 22
- 3.1 Definición de polinomio
- 3.2 Suma y resta de polinomios
- 3.3 Multiplicación de polinomios
- 3.4 Productos notables
- 3.5 División de polinomios
- 3.6 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 4: Factorización · pág. 27
- 4.1 Factor común
- 4.2 Factorización por agrupación

- 4.3 Diferencia de cuadrados
- 4.4 Trinomio cuadrado perfecto
- 4.5 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
- 4.6 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
- 4.7 Suma y diferencia de cubos
- 4.8 Ejercicios y soluciones

PARTE II: ECUACIONES

- Capítulo 5: Ecuaciones lineales · pág. 35
- 5.1 Definición de ecuación
- 5.2 Ecuaciones de primer grado
- 5.3 Propiedades de las ecuaciones
- 5.4 Resolución paso a paso
- 5.5 Ecuaciones con paréntesis
- 5.6 Ecuaciones con fracciones
- 5.7 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 6: Ecuaciones cuadráticas · pág. 45
- 6.1 Definición de ecuación cuadrática
- 6.2 Factorización
- 6.3 Método de la fórmula general
- 6.4 Completar el cuadrado
- 6.5 El discriminante
- 6.6 Relaciones entre las raíces y los coeficientes
- 6.7 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 7: Sistemas de ecuaciones · pág. 55
- 7.1 Qué es un sistema de ecuaciones
- 7.2 Método de sustitución
- 7.3 Método de eliminación
- 7.4 Método gráfico

- 7.5 Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas
- 7.6 Sistemas incompatibles y dependientes
- 7.7 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 8: Ecuaciones e inecuaciones · pág. 66
- 8.1 Definición de inecuación
- 8.2 Inecuaciones de primer grado
- 8.3 Inecuaciones cuadráticas
- 8.4 Sistemas de inecuaciones
- 8.5 Solución en la recta numérica
- 8.6 Ejercicios y soluciones

PARTE III: FUNCIONES

- Capítulo 9: Introducción a las funciones · pág. 78
- 9.1 Definición de función
- 9.2 Dominio y rango
- 9.3 Representación de funciones
- 9.4 Funciones lineales
- 9.5 Funciones cuadráticas
- 9.6 Funciones recíprocas
- 9.7 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 10: Funciones polinómicas · pág. 88
- 10.1 Funciones de primer grado
- 10.2 Funciones de segundo grado
- 10.3 Funciones de tercer grado
- 10.4 Polinomio de Taylor (introducción)
- 10.5 Ejercicios y soluciones

PARTE IV: ÁLGEBRA AVANZADA

- Capítulo 11: Exponentes y radicales · pág. 102
- 11.1 Leyes de los exponentes

- 11.2 Exponentes racionales
- 11.3 Radicales y su simplificación
- 11.4 Operaciones con radicales
- 11.5 Ecuaciones con radicales
- 11.6 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 12: Logaritmos · pág. 110
- 12.1 Definición de logaritmo
- 12.2 Propiedades de los logaritmos
- 12.3 Logaritmo común y logaritmo natural
- 12.4 Cambio de base
- 12.5 Ecuaciones logarítmicas
- 12.6 Aplicaciones
- 12.7 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 13: Matrices y determinantes · pág. 119
- 13.1 Definición de matriz
- 13.2 Tipos de matrices
- 13.3 Operaciones con matrices
- 13.4 Determinante de una matriz
- 13.5 Regla de Cramer
- 13.6 Inversa de una matriz
- 13.7 Sistemas con matrices
- 13.8 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 14: Progresiones y sucesiones · pág. 127
- 14.1 Sucesiones numéricas
- 14.2 Progresión aritmética
- 14.3 Progresión geométrica
- 14.4 Suma de términos
- 14.5 Aplicaciones

- 14.6 Ejercicios y soluciones
- Capítulo 15: Combinatoria y binomio de Newton · pág. 136
- 15.1 Principio de conteo
- 15.2 Permutaciones
- 15.3 Combinaciones
- 15.4 Binomio de Newton
- 15.5 Triángulo de Pascal
- 15.6 Ejercicios y soluciones
- Repaso General · pág. 142
- Tabla de Fórmulas · pág. 148
- Glosario de Términos · pág. 153

PARTE I: FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA

CAPÍTULO 1: LOS NÚMEROS Y SUS PROPIEDADES

1.1 Números naturales

Los números naturales son los primeros números que aprendemos a usar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Los usamos para contar objetos. Si tienes 3 manzanas y agregas 2 más, ahora tienes 5 manzanas.

El conjunto de los números naturales se representa con la letra N.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Algunos autores incluyen el cero en los números naturales:

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Propiedades fundamentales de los números naturales:

a) Cerradura en suma: Si a y b son naturales, entonces $a + b$ es natural. **Ejemplo:** $3 + 4 = 7$ (7 es natural)

b) Cerradura en multiplicación: Si a y b son naturales, entonces $a \times b$ es natural. **Ejemplo:** $3 \times 4 = 12$ (12 es natural)

c) Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a$ **Ejemplo:** $5 + 3 = 3 + 5 = 8$

d) Propiedad conmutativa de la multiplicación: $a \times b = b \times a$ **Ejemplo:** $5 \times 3 = 3 \times 5 = 15$

e) Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$ **Ejemplo:** $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$

f) Propiedad asociativa de la multiplicación: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ **Ejemplo:** $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 24$

g) Elemento neutro de la suma: $a + 0 = a$ **Ejemplo:** $7 + 0 = 7$

h) Elemento neutro de la multiplicación: $a \times 1 = a$ **Ejemplo:** $7 \times 1 = 7$

i) Propiedad distributiva: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ **Ejemplo:** $3 \times (4 + 5) = 3 \times 4 + 3 \times 5 = 12 + 15 = 27$

Los números naturales se organizan en un orden: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$

Cada número natural tiene un sucesor: el sucesor de n es $n + 1$. Cada número natural (excepto el 1) tiene un predecesor: el predecesor de n es $n - 1$.

1.2 Números enteros

Los números enteros incluyen los naturales, el cero y los números negativos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Los números enteros se clasifican en tres grupos:

- Enteros positivos: 1, 2, 3, 4, 5, ...
- Cero: 0
- Enteros negativos: -1, -2, -3, -4, -5, ...

En la recta numérica, los enteros se representan así:

... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 ... <---|---|---|---|---|---|---|---|--->

Operaciones con enteros:

Suma de positivos: $3 + 5 = 8$

Suma de negativos: $(-3) + (-5) = -8$

Suma de positivo y negativo: $3 + (-5) = -2$ $5 + (-3) = 2$

Resta: $3 - 5 = -2$ $(-3) - (-5) = 2$ $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$

Multiplicación de signos iguales: $(+3) \times (+5) = 15$ $(-3) \times (-5) = 15$

Multiplicación de signos diferentes: $(+3) \times (-5) = -15$ $(-3) \times (+5) = -15$

Regla de signos para multiplicación y división:

- positivo x positivo = positivo
- negativo x negativo = positivo
- positivo x negativo = negativo
- negativo x positivo = negativo

Para división, la misma regla de signos aplica.

El opuesto aditivo de un número a es $-a$, porque: $a + (-a) = 0$

El valor absoluto de un número a , denotado como $|a|$, es la distancia de ese número al cero en la recta numérica:

$$|5| = 5 \quad |-5| = 5 \quad |0| = 0$$

Ejemplos resueltos:

Ejemplo 1: Calcular $(-7) + (-3)$

Solución: Ambos son negativos, sumo y pongo negativo

$$(-7) + (-3) = -(7 + 3) = -10$$

Ejemplo 2: Calcular $(-8) - (-3)$

Solución: Restar un negativo es sumar el positivo

$$(-8) - (-3) = -8 + 3 = -5$$

Ejemplo 3: Calcular $(-4) \times 6$

Solución: Signos diferentes, resultado negativo

$$(-4) \times 6 = -24$$

Ejemplo 4: Calcular $(-2) \times (-9)$

Solución: Signos iguales, resultado positivo

$$(-2) \times (-9) = 18$$

1.3 Números racionales

Un número racional es cualquier número que puede expresarse como una fracción a/b , donde a y b son enteros y b no es cero.

$$Q = \{a/b : a, b \text{ son enteros, } b \text{ distinto de } 0\}$$

Ejemplos de números racionales: $1/2$, $3/4$, $-2/5$, $7/3$, 0.5 , $0.333\dots$, -0.25 , 8 , -3

Todo número entero es racional porque puede escribirse como fracción: $5 = 5/1$ $-3 = -3/1$ $0 = 0/1$

Los decimales que terminan son racionales: $0.5 = 1/2$ $0.75 = 3/4$ $0.125 = 1/8$

Los decimales periódicos (que se repiten) también son racionales: $0.333\dots = 1/3$
 $0.142857142857\dots = 1/7$

Operaciones con fracciones:

Suma: $a/b + c/d = (a \times d + b \times c) / (b \times d)$ **Ejemplo:** $1/3 + 2/5 = (1 \times 5 + 3 \times 2) / (3 \times 5) = 11/15$

Resta: $a/b - c/d = (a \times d - b \times c) / (b \times d)$ **Ejemplo:** $3/4 - 1/3 = (3 \times 3 - 4 \times 1) / (4 \times 3) = 5/12$

Multipliación: $(a/b) \times (c/d) = (a \times c) / (b \times d)$ **Ejemplo:** $2/3 \times 4/5 = 8/15$

División: $(a/b) / (c/d) = (a \times d) / (b \times c)$ **Ejemplo:** $3/4 / 2/5 = (3 \times 5) / (4 \times 2) = 15/8$

Simplificación de fracciones: Para simplificar, divido numerador y denominador por su MCD.
Ejemplo: $12/18$

$MCD(12, 18) = 6$ $12/18 = (12/6) / (18/6) = 2/3$

Fracciones equivalentes: $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 10/20$

Para comparar fracciones, las igualo a común denominador: **Ejemplo:** Comparar $3/4$ y $5/6$

$3/4 = 9/12$ $5/6 = 10/12$ Como $9/12 < 10/12$, entonces $3/4 < 5/6$

1.4 Números irracionales

Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como fracción de dos enteros. Su representación decimal no termina y no es periódica.

Ejemplos de números irracionales:

Pi (π) = 3.14159265358979... Raíz cuadrada de 2 = 1.41421356237... Raíz cuadrada de 3 = 1.73205080756... Número de Euler (e) = 2.71828182845... Golden Ratio (ϕ) = 1.61803398874...

La raíz cuadrada de 2 es irracional. Esto se puede demostrar por reducción al absurdo:

Supongamos que $\sqrt{2} = a/b$ (fracción irreducible) Entonces $2 = a^2 / b^2$ Entonces $2b^2 = a^2$ Esto significa que a^2 es par, por lo tanto a es par Sea $a = 2k$, entonces $2b^2 = 4k^2$, es decir $b^2 = 2k^2$ Esto significa que b^2 es par, por lo tanto b es par Pero entonces a y b ambos son pares, contradice que a/b sea irreducible. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es irracional.

En la recta numérica, los irracionales ocupan los puntos que no pueden marcarse con fracciones exactas.

La suma de un racional y un irracional es irracional. El producto de un racional distinto de cero y un irracional es irracional.

1.5 Números reales

El conjunto de los números reales (R) incluye todos los números racionales e irracionales:

$$R = Q \cup (R - Q)$$

Es decir, los reales son la unión de los racionales y los irracionales.

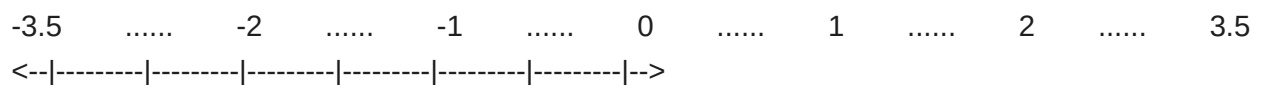
Clasificación completa de los números:

Naturales (N): 1, 2, 3, 4, ... Enteros (Z): ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Racionales (Q): ..., -1/2, 0.5, 3/4, 2, ... Irracionales: π , $\sqrt{2}$, e, ... Reales (R): Todos los anteriores

Cadena de inclusiones: $N \subset Z \subset Q \subset R$

Los números reales se representan en la recta numérica, que es una línea continua donde cada punto corresponde a un número real.

Ejemplos en la recta numérica:



El número $1/2$ está entre 0 y 1 El número $-\sqrt{2}$ está entre -2 y -1

1.6 Propiedades de la aritmética

Resumen de todas las propiedades fundamentales:

PROPIEDAD CONMUTATIVA: $a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$ **Ejemplo:** $7 + 3 = 3 + 7 = 10$

Ejemplo: $7 \times 3 = 3 \times 7 = 21$

PROPIEDAD ASOCIATIVA: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ **Ejemplo:** $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$

Ejemplo: $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 24$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$ **Ejemplo:** $5 \times (3 + 4) = 5 \times 3 + 5 \times 4 = 15 + 20 = 35$

ELEMENTO NEUTRO ADITIVO: $a + 0 = a$ **Ejemplo:** $8 + 0 = 8$

ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO: $a \times 1 = a$ **Ejemplo:** $8 \times 1 = 8$

ELEMENTO OPUESTO: $a + (-a) = 0$ **Ejemplo:** $6 + (-6) = 0$

INVERSO MULTIPLICATIVO (para a distinto de 0): $a \times (1/a) = 1$ **Ejemplo:** $4 \times (1/4) = 1$

CERRADURA: Si a y b son reales, entonces $a + b$, $a - b$, $a \times b$ son reales. Si a distinto de 0, entonces a/b es real.

1.7 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 1

- 1) Clasifica los siguientes números en Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales: a) 15 b) -7 c) $3/4$ d) $\sqrt{5}$ e) 0.25 f) $-12/3$
- 2) Simplifica las siguientes fracciones: a) $18/24$ b) $35/49$ c) $-45/60$ d) $100/250$
- 3) Realiza las siguientes operaciones: a) $(-5) + (-8)$ b) $(-12) - (-7)$ c) $(-3) \times (-9)$ d) $24 / (-6)$ e) $(-4) \times (-3) + (-2) \times 5$ f) $(-7) \times 3 - (-2) \times (-4)$
- 4) Calcula el valor absoluto: a) $|-15|$ b) $|7|$ c) $|-3/4|$ d) $|0|$
- 5) Completa la tabla de valores para la expresión $2x + 3$: $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

SOLUCIONES

- 1) a) 15: Natural, Entero, Racional, Real b) -7: Entero, Racional, Real c) $3/4$: Racional, Real d) $\sqrt{5}$: Irracional, Real e) $0.25 = 1/4$: Racional, Real f) $-12/3 = -4$: Entero, Racional, Real
- 2) a) $18/24 = 3/4$ (divido entre 6) b) $35/49 = 5/7$ (divido entre 7) c) $-45/60 = -3/4$ (divido entre 15) d) $100/250 = 2/5$ (divido entre 50)
- 3) a) $(-5) + (-8) = -13$ b) $(-12) - (-7) = -12 + 7 = -5$ c) $(-3) \times (-9) = 27$ d) $24 / (-6) = -4$ e) $(-4) \times (-3) + (-2) \times 5 = 12 + (-10) = 2$ f) $(-7) \times 3 - (-2) \times (-4) = -21 - 8 = -29$
- 4) a) $|-15| = 15$ b) $|7| = 7$ c) $|-3/4| = 3/4$ d) $|0| = 0$
- 5) Para $2x + 3$: $x = -2$: $2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$ $x = -1$: $2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$ $x = 0$: $2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$ $x = 1$: $2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$ $x = 2$: $2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$ $x = 3$: $2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 1

- Los números forman una familia: los naturales (N) sirven para contar; los enteros (Z) agregan el cero y los negativos; los racionales (Q) agregan las fracciones; y junto con los irracionales (como $\sqrt{2}$ o π) completan los números reales (R).
- Cada conjunto incluye al anterior: N está dentro de Z, Z dentro de Q, y Q dentro de R.

- Sumar, restar y multiplicar números reales siempre da un número real; dividir también, con una sola prohibición: nunca divides entre cero.
- Conmutativa: el orden no importa en sumas ni multiplicaciones ($a + b = b + a$, $a \times b = b \times a$). Asociativa: los paréntesis no cambian el resultado ($(a + b) + c = a + (b + c)$).
- Distributiva: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Es la propiedad que más vas a usar en todo el libro.
- El 0 es el neutro de la suma ($a + 0 = a$) y el 1 el de la multiplicación ($a \times 1 = a$). El opuesto de a es $-a$ y su inverso es $1/a$ (con a distinto de cero).

CAPÍTULO 2: VARIABLES Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1 Qué es una variable

Una variable es un símbolo (usualmente una letra) que representa un número desconocido o que puede cambiar de valor.

Las variables más comunes son: x, y, z, a, b, c, n, t

Ejemplos: "Tengo x manzanas" donde x puede ser 3, 5, 10, etc. "La temperatura es t grados" donde t cambia con el tiempo "El área de un cuadrado de lado l es l al cuadrado"

El símbolo de igual ($=$) indica que dos expresiones representan el mismo valor.

En la expresión $y = 2x + 1$:

- x es la variable independiente
- y es la variable dependiente
- 2 y 1 son constantes

Cuando asignamos un valor a una variable, decimos que "evaluamos" la expresión.

Si $x = 3$, entonces $2x + 1 = 2(3) + 1 = 7$ Si $x = -1$, entonces $2x + 1 = 2(-1) + 1 = -1$ Si $x = 0$, entonces $2x + 1 = 2(0) + 1 = 1$

2.2 Términos y coeficientes

En una expresión algebraica:

TÉRMINO: Cada parte de la expresión separada por signos de suma o resta.

COEFICIENTE: El número que multiplica a la variable.

BASE: La variable que está siendo elevada a un exponente.

EXPONENTE: Indica cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

Ejemplo: En la expresión $3x^2 - 5x + 7$

- $3x^2$ es un término con coeficiente 3, base x , exponente 2

- $-5x$ es un término con coeficiente -5 , base x , exponente 1
- 7 es un término constante (coeficiente 7)

Los términos se separan por signos $+$ o $-$: $3x^2 - 5x + 7$ tiene tres términos

Tipos de expresiones según el número de términos:

MONOMIO: Un solo término Ejemplos: $5x$, $3x^2$, -7 , $2xy$

BINOMIO: Dos términos Ejemplos: $3x + 2$, $x^2 - 4$, $5a - 3b$

TRINOMIO: Tres términos Ejemplos: $x^2 + 2x + 1$, $3a^2 - 5a + 2$

POLINOMIO: Tres o más términos (o en general, cualquier expresión con términos de variables elevadas a exponentes enteros no negativos) Ejemplos: $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

2.3 Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de números, variables y operaciones algebraicas.

Ejemplos: $3x + 5$, $2x^2 - 4x + 1$, $(a + b)^2$, $x^3 - 2x^2 + x - 7$

Para evaluar una expresión algebraica, sustituimos la variable por un valor y realizamos las operaciones siguiendo el orden de precedencia:

1. Paréntesis y corchetes
2. Exponentes y raíces
3. Multiplicación y división (de izquierda a derecha)
4. Suma y resta (de izquierda a derecha)

Evaluación de expresiones:

Ejemplo 1: Evaluar $2x + 3$ para $x = 5$

$$2(5) + 3 = 10 + 3 = 13$$

Ejemplo 2: Evaluar $x^2 - 3x + 2$ para $x = 4$

$$(4)^2 - 3(4) + 2 = 16 - 12 + 2 = 6$$

Ejemplo 3: Evaluar $3a^2 - 2a + 1$ para $a = -2$

$$3(-2)^2 - 2(-2) + 1 = 3(4) + 4 + 1 = 12 + 4 + 1 = 17$$

Ejemplo 4: Evaluar $(x + y) / (x - y)$ para $x = 7$, $y = 3$

$$(7 + 3) / (7 - 3) = 10 / 4 = 5/2$$

Ejemplo 5: Evaluar $x^3 + 2x^2 - x + 5$ para $x = -1$

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 5 = -1 + 2 + 1 + 5 = 7$$

2.4 Términos semejantes

Los términos semejantes son aquellos que tienen la misma variable elevada al mismo exponente. Solo se pueden sumar o restar términos semejantes.

Ejemplos de términos semejantes: $3x$ y $5x$ son semejantes (ambos tienen x) $2x^2$ y $-7x^2$ son semejantes (ambos tienen x^2) $4xy$ y $-3xy$ son semejantes (ambos tienen xy) 5 y -8 son semejantes (ambos son constantes)

Ejemplos de términos NO semejantes: $3x$ y $3x^2$ NO son semejantes (distintos exponentes) $2x$ y $2y$ NO son semejantes (distintas variables) x^2 y x^3 NO son semejantes (distintos exponentes)

Para sumar o restar términos semejantes, opero los coeficientes y mantengo la variable:

$$3x + 5x = 8x \quad 7x^2 - 2x^2 = 5x^2 \quad 4a + 3b - 2a + b = (4a - 2a) + (3b + b) = 2a + 4b$$

Para simplificar expresiones, primero reagrupamos los términos semejantes:

Ejemplo: Simplificar $3x + 5 - 2x + 8 - x + 4$

$$\text{Agrupo: } (3x - 2x - x) + (5 + 8 + 4) \text{ Resultado: } 0x + 17 = 17$$

Ejemplo: Simplificar $2x^2 + 3x - 5 - x^2 + 2x + 8$

$$\text{Agrupo: } (2x^2 - x^2) + (3x + 2x) + (-5 + 8) \text{ Resultado: } x^2 + 5x + 3$$

Ejemplo: Simplificar $4a^2b - 3ab^2 + 2a^2b + 5ab^2 - a^2b$

$$\text{Agrupo: } (4a^2b + 2a^2b - a^2b) + (-3ab^2 + 5ab^2) \text{ Resultado: } 5a^2b + 2ab^2$$

2.5 Propiedades de las operaciones con variables

Las propiedades que vimos con números ahora se aplican a expresiones algebraicas:

PROPIEDAD CONMUTATIVA: $a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$ **Ejemplo:** $x + 3 = 3 + x$

Ejemplo: $2 \times y = y \times 2$

PROPIEDAD ASOCIATIVA: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ **Ejemplo:** $(x + 2) + 3 = x + (2 + 3) = x + 5$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ **Ejemplo:** $3(x + 4) = 3x + 12$

Ejemplo: $-2(3a - 5) = -6a + 10$

Ejemplo: $x(y + z) = xy + xz$

La propiedad distributiva es fundamental para:

- Eliminar paréntesis
- Factorizar expresiones
- Simplificar productos

Ejemplo de eliminación de paréntesis: $2(3x + 4) - 5(x - 2) = 6x + 8 - 5x + 10 = x + 18$

Ejemplo con varios paréntesis: $3[2(x + 1) - 4(3x - 2)] = 3[2x + 2 - 12x + 8] = 3[-10x + 10] = -30x + 30$

2.6 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2

- 1) Identifica los términos, coeficientes y la base de: a) $5x^3 - 2x^2 + 7x - 1$ b) $-3a^2 + 4a - 9$ c) $2x^2y - 5xy^2 + 3$
- 2) Evalúa las siguientes expresiones: a) $3x - 7$ para $x = 4$ b) $x^2 + 2x - 5$ para $x = -3$ c) $2a^2 - 3a + 1$ para $a = 2$ d) $(x + y) / 2$ para $x = 8, y = 6$ e) $x^3 - 4x$ para $x = 2$
- 3) Identifica cuáles son términos semejantes: a) $3x$ y $-5x$ b) $2x^2$ y $4x$ c) $7a^2b$ y $-2ab^2$ d) $-3xy$ y $8xy$ e) 5 y -12
- 4) Simplifica las siguientes expresiones: a) $4x + 7 - 2x + 3$ b) $3a^2 - 5a + 2a^2 + a$ c) $5x + 3y - 2x - y + 4$ d) $2(x + 3) - 4(x - 1)$ e) $3[2(x - 1) + 4]$
- 5) Elimina los paréntesis y simplifica: a) $5(2x + 3) - 3(x - 2)$ b) $2(3a - 4) + 5(2a + 1)$ c) $-(x - 3) + 2(x + 4)$ d) $3x - 2(x - (x + 1))$

SOLUCIONES

- 1) a) $5x^3 - 2x^2 + 7x - 1$ Términos: $5x^3, -2x^2, 7x, -1$ Coeficientes: $5, -2, 7, -1$ Bases: x

b) $-3a^2 + 4a - 9$ Términos: $-3a^2$, $4a$, -9 Coeficientes: -3 , 4 , -9 Bases: a

c) $2x^2y - 5xy^2 + 3$ Términos: $2x^2y$, $-5xy^2$, 3 Coeficientes: 2 , -5 , 3 Bases: x^2y , xy^2

2) a) $3(4) - 7 = 12 - 7 = 5$ b) $(-3)^2 + 2(-3) - 5 = 9 - 6 - 5 = -2$ c) $2(2)^2 - 3(2) + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$
d) $(8 + 6) / 2 = 14/2 = 7$ e) $(2)^3 - 4(2) = 8 - 8 = 0$

3) a) Sí, son semejantes (ambos tienen x) b) No, distintos exponentes c) No, distintas variables
d) Sí, son semejantes (ambos tienen xy) e) Sí, son semejantes (ambos son constantes)

4) a) $(4x - 2x) + (7 + 3) = 2x + 10$ b) $(3a^2 + 2a^2) + (-5a + a) = 5a^2 - 4a$ c) $(5x - 2x) + (3y - y) + 4 = 3x + 2y + 4$ d) $2x + 6 - 4x + 4 = -2x + 10$ e) $3[2x - 2 + 4] = 3[2x + 2] = 6x + 6$

5) a) $10x + 15 - 3x + 6 = 7x + 21$ b) $6a - 8 + 10a + 5 = 16a - 3$ c) $-x + 3 + 2x + 8 = x + 11$ d) $3x - 2(x - x - 1) = 3x - 2(-1) = 3x + 2$

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 2

- Una variable es una letra que representa un número desconocido o que cambia; las más usadas son x , y , z .
- Un término tiene tres partes: el coeficiente (el número), la variable y el exponente. En $5x^2$, el coeficiente es 5 y el exponente es 2 .
- Evaluar una expresión es sustituir la variable por un valor y calcular; hazlo con paréntesis para no perder los signos.
- Los términos semejantes tienen la misma variable con el mismo exponente, y solo los semejantes se pueden sumar o restar: $3x + 5x = 8x$, pero $3x + 3x^2$ se queda como está.
- Las propiedades de los números (conmutativa, asociativa, distributiva) también valen con variables: son tu permiso para reacomodar expresiones.

CAPÍTULO 3: OPERACIONES CON POLINOMIOS

3.1 Definición de polinomio

Un polinomio es una expresión algebraica compuesta por la suma de términos, donde cada término es un producto de un número (constante) y una variable elevada a un exponente entero no negativo.

Forma general de un polinomio en una variable x :

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{(n-1)} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

Donde:

- $a_n, a_{(n-1)}, \dots, a_0$ son los coeficientes (constantes)
- n es el grado del polinomio (el mayor exponente)
- a_n es el coeficiente principal

Clasificación por grado:

Grado 0 (constante): $P(x) = 5$ Grado 1 (lineal): $P(x) = 3x + 2$ Grado 2 (cuadrático): $P(x) = x^2 - 4x + 1$ Grado 3 (cúbico): $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 7$ Grado 4 (cuártico): $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Clasificación por número de términos:

Monomio: 1 término ($5x^2$) Binomio: 2 términos ($3x + 1$) Trinomio: 3 términos ($x^2 - 2x + 1$)
Polinomio: 3 o más términos

Ejemplos: $7x^3 - 2x + 5$ es un polinomio de grado 3 $4x^2 + 3x - 1$ es un polinomio de grado 2
 $-5x^4 + 2x^3 - x + 9$ es un polinomio de grado 4

3.2 Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, se suman o restan los términos semejantes.

SUMA DE POLINOMIOS:

$$(3x^2 + 2x - 1) + (5x^2 - 3x + 4) = (3x^2 + 5x^2) + (2x - 3x) + (-1 + 4) = 8x^2 - x + 3$$

$$(2a^3 - a^2 + 4) + (-a^3 + 3a^2 - 2a + 1) = (2a^3 - a^3) + (-a^2 + 3a^2) + (-2a) + (4 + 1) = a^3 + 2a^2 - 2a + 5$$

RESTA DE POLINOMIOS:

Para restar, cambio el signo de cada término del segundo polinomio y luego sumo:

$$(6x^2 + 4x - 3) - (2x^2 - x + 5) = 6x^2 + 4x - 3 - 2x^2 + x - 5 = (6x^2 - 2x^2) + (4x + x) + (-3 - 5) = 4x^2 + 5x - 8$$

$$(3a^2 + 2a - 7) - (a^2 - 5a + 3) = 3a^2 + 2a - 7 - a^2 + 5a - 3 = (3a^2 - a^2) + (2a + 5a) + (-7 - 3) = 2a^2 + 7a - 10$$

Ejemplo con tres polinomios:

$$(x^2 + 2x) + (3x^2 - x + 4) - (2x^2 + 5x - 1) = x^2 + 2x + 3x^2 - x + 4 - 2x^2 - 5x + 1 = (x^2 + 3x^2 - 2x^2) + (2x - x - 5x) + (4 + 1) = 2x^2 - 4x + 5$$

3.3 Multiplicación de polinomios

Para multiplicar polinomios, multiplico cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y luego sumo los términos semejantes.

MULTIPLICACIÓN DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO:

$$3x(2x^2 - 4x + 5) = 3x(2x^2) + 3x(-4x) + 3x(5) = 6x^3 - 12x^2 + 15x$$

MULTIPLICACIÓN DE DOS BINOMIOS (FOIL):

$$(x + 3)(x - 2) \text{ Primero: } x * x = x^2 \text{ Exteriores: } x * (-2) = -2x \text{ Interiores: } 3 * x = 3x \text{ Últimos: } 3 * (-2) = -6 \text{ Resultado: } x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$$

$$(2a + 1)(3a - 4) \text{ Primero: } 2a * 3a = 6a^2 \text{ Exteriores: } 2a * (-4) = -8a \text{ Interiores: } 1 * 3a = 3a \text{ Últimos: } 1 * (-4) = -4 \text{ Resultado: } 6a^2 - 8a + 3a - 4 = 6a^2 - 5a - 4$$

MULTIPLICACIÓN DE UN BINOMIO POR UN TRINOMIO:

$$(x + 2)(x^2 - 3x + 4) = x(x^2 - 3x + 4) + 2(x^2 - 3x + 4) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2x^2 - 6x + 8 = x^3 + (-3x^2 + 2x^2) + (4x - 6x) + 8 = x^3 - x^2 - 2x + 8$$

MULTIPLICACIÓN DE DOS POLINOMIOS GENERALES:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^2(x - 1) + x(x - 1) + 1(x - 1) = x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 = x^3 - 1$$

$$(2x^2 - x + 3)(x^2 + 2) = 2x^2(x^2 + 2) - x(x^2 + 2) + 3(x^2 + 2) = 2x^4 + 4x^2 - x^3 - 2x + 3x^2 + 6 = 2x^4 - x^3 + (4x^2 + 3x^2) - 2x + 6 = 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x + 6$$

3.4 Productos notables

Los productos notables son multiplicaciones especiales que aparecen frecuentemente y tienen fórmulas que facilitan su resolución.

1) CUADRADO DE UNA SUMA: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ejemplo: $(x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

Ejemplo: $(2a + 5)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(5) + 5^2$

$$= 4a^2 + 20a + 25$$

2) CUADRADO DE UNA DIFERENCIA: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo: $(x - 4)^2 = x^2 - 2(x)(4) + 4^2 = x^2 - 8x + 16$

Ejemplo: $(3a - 2)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(2) + 2^2$

$$= 9a^2 - 12a + 4$$

3) PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplo: $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$

Ejemplo: $(3a + 2)(3a - 2) = (3a)^2 - 2^2 = 9a^2 - 4$

Ejemplo: $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1$

4) CUADRADO DE UNA SUMA DE TRES TÉRMINOS: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ejemplo: $(x + 2 + 3)^2 = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

Verificación con la fórmula: $(x + 2 + 3)^2 = x^2 + 2^2 + 3^2 + 2(x)(2) + 2(x)(3) + 2(2)(3) = x^2 + 4 + 9 + 4x + 6x + 12 = x^2 + 10x + 25$

Resumen de productos notables:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3.5 División de polinomios

La división de polinomios se puede realizar de dos maneras principales:

DIVISIÓN POR UN MONOMIO:

Divido cada término del polinomio entre el monomio.

$$(6x^3 + 9x^2 - 3x) / (3x) = 6x^3/(3x) + 9x^2/(3x) - 3x/(3x) = 2x^2 + 3x - 1$$

$$(8a^4 - 12a^3 + 4a^2) / (4a^2) = 8a^4/(4a^2) - 12a^3/(4a^2) + 4a^2/(4a^2) = 2a^2 - 3a + 1$$

DIVISIÓN POR LONGITUD (DIVISIÓN LARGA):

Es similar a la división larga de números.

Ejemplo: Dividir $x^3 - 2x^2 + x - 3$ entre $x - 1$

Paso 1: Divido el primer término del dividendo entre el primer término del divisor: $x^3 / x = x^2$

Paso 2: Multiplico el divisor por el resultado: $x^2 * (x - 1) = x^3 - x^2$

Paso 3: Resto: $(x^3 - 2x^2 + x - 3) - (x^3 - x^2) = -x^2 + x - 3$

Paso 4: Repito el proceso: $-x^2 / x = -x$ $-x * (x - 1) = -x^2 + x$ $(-x^2 + x - 3) - (-x^2 + x) = -3$

Paso 5: Repito: $-3 / x = -3/x$ (esto no es un polinomio, así que paramos)

Resultado: $x^2 - x$ con residuo -3

Verificación: $(x - 1)(x^2 - x) + (-3) = x^3 - x^2 - x^2 + x - 3 = x^3 - 2x^2 + x - 3$ (correcto)

Ejemplo 2: Dividir $2x^3 + 3x^2 - x + 5$ entre $x + 2$

$2x^3 / x = 2x^2$ $2x^2 * (x + 2) = 2x^3 + 4x^2$ Resto: $(2x^3 + 3x^2 - x + 5) - (2x^3 + 4x^2) = -x^2 - x + 5$

$-x^2 / x = -x$ $-x * (x + 2) = -x^2 - 2x$ Resto: $(-x^2 - x + 5) - (-x^2 - 2x) = x + 5$

$x / x = 1$ $1 * (x + 2) = x + 2$ Resto: $(x + 5) - (x + 2) = 3$

Resultado: $2x^2 - x + 1$ con residuo 3

3.6 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 3

1) Realiza las siguientes sumas: a) $(3x^2 + 2x) + (5x^2 - 4x + 1)$ b) $(2a^3 - a + 3) + (a^3 + 4a^2 - 2a - 1)$ c) $(x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + x - 3)$

2) Realiza las siguientes restas: a) $(4x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - x + 5)$ b) $(5a^2 - 3a + 2) - (3a^2 + 4a - 1)$ c) $(x^3 + 2x^2 - x) - (x^3 - x^2 + 3x - 2)$

3) Multiplica los siguientes binomios: a) $(x + 4)(x - 3)$ b) $(2a + 1)(a - 5)$ c) $(3x - 2)(2x + 3)$ d) $(x + y)(x - y)$

4) Aplica los productos notables: a) $(x + 5)^2$ b) $(3a - 2)^2$ c) $(x + 4)(x - 4)$ d) $(2x + 3)^2$

5) Realiza las siguientes divisiones: a) $(6x^2 + 9x) / (3x)$ b) $(8a^3 - 12a^2 + 4a) / (4a)$ c) $(x^2 + 5x + 6) / (x + 2)$ d) $(x^3 - 1) / (x - 1)$

SOLUCIONES

1) a) $(3x^2 + 5x^2) + (2x - 4x) + 1 = 8x^2 - 2x + 1$ b) $(2a^3 + a^3) + 4a^2 + (-a - 2a) + (3 - 1) = 3a^3 + 4a^2 - 3a + 2$ c) $(x^2 + x^2 + x^2) + (2x - 2x + x) + (1 + 1 - 3) = 3x^2 + x - 1$

2) a) $(4x^2 - 2x^2) + (3x + x) + (-1 - 5) = 2x^2 + 4x - 6$ b) $(5a^2 - 3a^2) + (-3a - 4a) + (2 + 1) = 2a^2 - 7a + 3$ c) $(x^3 - x^3) + (2x^2 + x^2) + (-x - 3x) + 2 = 3x^2 - 4x + 2$

3) a) $x^2 - 3x + 4x - 12 = x^2 + x - 12$ b) $2a^2 - 10a + a - 5 = 2a^2 - 9a - 5$ c) $6x^2 + 9x - 4x - 6 = 6x^2 + 5x - 6$ d) $x^2 - y^2$

4) a) $x^2 + 10x + 25$ b) $9a^2 - 12a + 4$ c) $x^2 - 16$ d) $4x^2 + 12x + 9$

5) a) $6x^2/(3x) + 9x/(3x) = 2x + 3$ b) $8a^3/(4a) - 12a^2/(4a) + 4a/(4a) = 2a^2 - 3a + 1$ c) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, resultado: $x + 3$ d) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, resultado: $x^2 + x + 1$

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 3

- Un polinomio es una suma de términos con exponentes enteros no negativos. Su grado es el mayor exponente; se clasifica por número de términos (monomio, binomio, trinomio) o por grado (lineal, cuadrático, cúbico...).
- Para sumar o restar polinomios, agrupa y opera solo los términos semejantes.
- Para multiplicar, cada término del primero por cada término del segundo; con dos binomios usa FOIL (primero, externo, interno, último).
- Los productos notables $((a + b)^2, (a - b)^2, (a + b)(a - b))$ son atajos que aparecen una y otra vez: apréndetelos de memoria.
- La división de polinomios sigue el mismo algoritmo que la división larga de primaria; el dividendo es igual al divisor por el cociente más el residuo.

CAPÍTULO 4: FACTORIZACIÓN

4.1 Factor común

El factor común es el método de factorización más básico. Consiste en extraer el factor común de todos los términos de una expresión.

Método:

1. Busco el MCD de los coeficientes
2. Busco la variable común con el menor exponente
3. Extraigo el factor común
4. Divido cada término entre el factor común

Ejemplo 1: Factorizar $6x^2 + 9x$

MCD de 6 y 9 = 3 Variable común: x (menor exponente es 1) Factor común: $3x$ $6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$

Ejemplo 2: Factorizar $12a^3 - 8a^2 + 4a$

MCD de 12, 8, 4 = 4 Variable común: a (menor exponente es 1) Factor común: $4a$ $12a^3 - 8a^2 + 4a = 4a(3a^2 - 2a + 1)$

Ejemplo 3: Factorizar $15x^4 - 10x^3 + 5x^2$

MCD de 15, 10, 5 = 5 Variable común: x^2 (menor exponente) Factor común: $5x^2$ $15x^4 - 10x^3 + 5x^2 = 5x^2(3x^2 - 2x + 1)$

Ejemplo 4: Factorizar $-8x^3 + 12x^2 - 4x$

MCD de 8, 12, 4 = 4 Si el primer término es negativo, extraigo el signo negativo Factor común: $-4x$ $-8x^3 + 12x^2 - 4x = -4x(2x^2 - 3x + 1)$

Para verificar, multiplico el factor común por el polinomio dentro del paréntesis y debe darme la expresión original.

4.2 Factorización por agrupación

La factorización por agrupación se usa cuando no hay un factor común para todos los términos, pero si para pares de términos.

Método:

1. Agrupo los términos en pares
2. Extraigo el factor común de cada par
3. Si los factores comunes son iguales, los extraigo

Ejemplo 1: Factorizar $x^3 + x^2 + 2x + 2$

Agrupo: $(x^3 + x^2) + (2x + 2)$ Factor común del primer par: $x^2(x + 1)$ Factor común del segundo par: $2(x + 1)$ Resultado: $(x^2 + 2)(x + 1)$

Ejemplo 2: Factorizar $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

Agrupo: $(2x^3 - 3x^2) + (4x - 6)$ Primer par: $x^2(2x - 3)$ Segundo par: $2(2x - 3)$ Resultado: $(x^2 + 2)(2x - 3)$

Ejemplo 3: Factorizar $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

Agrupo: $(x^3 - 2x^2) + (-3x + 6)$ Primer par: $x^2(x - 2)$ Segundo par: $-3(x - 2)$ Resultado: $(x^2 - 3)(x - 2)$

Ejemplo 4: Factorizar $3a^2 + 6a - 2a - 4$

Agrupo: $(3a^2 + 6a) + (-2a - 4)$ Primer par: $3a(a + 2)$ Segundo par: $-2(a + 2)$ Resultado: $(3a - 2)(a + 2)$

4.3 Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados es un producto notable que se factoriza así:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Para aplicar este método, debo identificar dos términos que sean cuadrados perfectos separados por un signo de resta.

Ejemplo 1: Factorizar $x^2 - 9$

x^2 es el cuadrado de x 9 es el cuadrado de 3 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Ejemplo 2: Factorizar $4a^2 - 25$

$4a^2$ es el cuadrado de $2a$ 25 es el cuadrado de 5 $4a^2 - 25 = (2a + 5)(2a - 5)$

Ejemplo 3: Factorizar $9x^2 - 16y^2$

$9x^2$ es el cuadrado de $3x$ $16y^2$ es el cuadrado de $4y$ $9x^2 - 16y^2 = (3x + 4y)(3x - 4y)$

Ejemplo 4: Factorizar $x^4 - 1$

x^4 es el cuadrado de x^2 1 es el cuadrado de 1 $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ Pero $x^2 - 1$ también se puede factorizar: $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

Ejemplo 5: Factorizar $(x + 3)^2 - (x - 1)^2$

Esto es una diferencia de cuadrados donde: $a = x + 3$ y $b = x - 1 = [(x + 3) + (x - 1)][(x + 3) - (x - 1)] = [x + 3 + x - 1][x + 3 - x + 1] = [2x + 2][4] = 8(x + 1)$

NOTA: La suma de cuadrados NO se puede factorizar en los números reales: $a^2 + b^2$ NO tiene factorización real

4.4 Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio de la forma:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Para identificar un trinomio cuadrado perfecto:

1. El primer término es un cuadrado perfecto
2. El último término es un cuadrado perfecto
3. El término medio es el doble del producto de las raíces

Ejemplo 1: Factorizar $x^2 + 6x + 9$

Primer término: $x^2 = (x)^2$ Último término: $9 = (3)^2$ Términos medios: $2 * x * 3 = 6x$ (coincide)
Resultado: $(x + 3)^2$

Ejemplo 2: Factorizar $4a^2 - 12a + 9$

Primer término: $4a^2 = (2a)^2$ Último término: $9 = (3)^2$ Términos medios: $2 * 2a * 3 = 12a$ (coincide con $-12a$) Resultado: $(2a - 3)^2$

Ejemplo 3: Factorizar $x^2 - 10x + 25$

Primer término: $x^2 = (x)^2$ Último término: $25 = (5)^2$ Términos medios: $2 * x * 5 = 10x$ (coincide con $-10x$) Resultado: $(x - 5)^2$

Ejemplo 4: Factorizar $9x^2 + 24x + 16$

Primer término: $9x^2 = (3x)^2$ Último término: $16 = (4)^2$ Términos medios: $2 * 3x * 4 = 24x$ (coincide) Resultado: $(3x + 4)^2$

4.5 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, busco dos números que:

- Se multipliquen para dar c (el término constante)
- Se sumen para dar b (el coeficiente del término lineal)

Método:

1. Identifico b y c
2. Busco dos números m y n tal que $m * n = c$ y $m + n = b$
3. La factorización es $(x + m)(x + n)$

Ejemplo 1: Factorizar $x^2 + 7x + 12$

$b = 7$, $c = 12$ Busco dos números que multiplicados den 12 y sumados den 7 $3 * 4 = 12$ y $3 + 4 = 7$ Resultado: $(x + 3)(x + 4)$

Ejemplo 2: Factorizar $x^2 - 5x + 6$

$b = -5$, $c = 6$ Dos números que multiplicados den 6 y sumados den -5 $(-2) * (-3) = 6$ y $(-2) + (-3) = -5$ Resultado: $(x - 2)(x - 3)$

Ejemplo 3: Factorizar $x^2 + 2x - 15$

$b = 2$, $c = -15$ Dos números que multiplicados den -15 y sumados den 2 $5 * (-3) = -15$ y $5 + (-3) = 2$ Resultado: $(x + 5)(x - 3)$

Ejemplo 4: Factorizar $x^2 - x - 12$

$b = -1$, $c = -12$ Dos números que multiplicados den -12 y sumados den -1 $(-4) * 3 = -12$ y $(-4) + 3 = -1$ Resultado: $(x - 4)(x + 3)$

Ejemplo 5: Factorizar $x^2 - 4x + 4$

$b = -4$, $c = 4$ Dos números que multiplicados den 4 y sumados den -4 $(-2) * (-2) = 4$ y $(-2) + (-2) = -4$ Resultado: $(x - 2)^2$ (es un cuadrado perfecto)

4.6 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio donde a no es 1, uso el método del producto-suma o el método de "splitting" (fraccionamiento).

MÉTODO DEL PRODUCTO-SUMA:

1. Multiplico $a * c$ (coeficiente principal por constante)
2. Busco dos números que multiplicados den $a*c$ y sumados den b
3. Fraccio el término medio usando esos dos números
4. Factorizo por agrupación

Ejemplo 1: Factorizar $2x^2 + 7x + 3$

$a = 2$, $b = 7$, $c = 3$ $a * c = 2 * 3 = 6$ Busco dos números que multiplicados den 6 y sumados den 7 $1 * 6 = 6$ y $1 + 6 = 7$ Fraccio: $2x^2 + x + 6x + 3$ Agrupo: $x(2x + 1) + 3(2x + 1)$ Resultado: $(x + 3)(2x + 1)$

Ejemplo 2: Factorizar $3x^2 - 10x + 8$

$a = 3$, $b = -10$, $c = 8$ $a * c = 3 * 8 = 24$ Dos números: $(-4) * (-6) = 24$ y $(-4) + (-6) = -10$ Fraccio: $3x^2 - 4x - 6x + 8$ Agrupo: $x(3x - 4) - 2(3x - 4)$ Resultado: $(x - 2)(3x - 4)$

Ejemplo 3: Factorizar $6x^2 + x - 2$

$a = 6$, $b = 1$, $c = -2$ $a * c = 6 * (-2) = -12$ Dos números: $4 * (-3) = -12$ y $4 + (-3) = 1$ Fraccio: $6x^2 + 4x - 3x - 2$ Agrupo: $2x(3x + 2) - 1(3x + 2)$ Resultado: $(2x - 1)(3x + 2)$

4.7 Suma y diferencia de cubos

SUMA DE CUBOS: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

DIFERENCIA DE CUBOS: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Para identificar una suma o diferencia de cubos:

- El primer término es un cubo perfecto
- El segundo término es un cubo perfecto
- Están separados por un signo de suma o resta

Ejemplo 1: Factorizar $x^3 + 8$

x^3 es el cubo de x 8 es el cubo de 2 $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

Ejemplo 2: Factorizar $x^3 - 27$

x^3 es el cubo de x 27 es el cubo de 3 $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

Ejemplo 3: Factorizar $8a^3 + 125$

$8a^3$ es el cubo de $2a$ 125 es el cubo de 5 $8a^3 + 125 = (2a + 5)(4a^2 - 10a + 25)$

Ejemplo 4: Factorizar $27x^3 - 64y^3$

$27x^3$ es el cubo de $3x$ $64y^3$ es el cubo de $4y$ $27x^3 - 64y^3 = (3x - 4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)$

RESUMEN DE MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN:

1. Factor común
2. Factorización por agrupación
3. Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
5. Trinomio $x^2 + bx + c$: busco dos números
6. Trinomio $ax^2 + bx + c$: método del producto-suma
7. Suma de cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
8. Diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

4.8 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 4

- 1) Factoriza por factor común: a) $8x^2 + 12x$ b) $15a^3 - 10a^2$ c) $18x^4 - 24x^3 + 6x^2$ d) $-6x^3 + 9x^2 - 3x$
- 2) Factoriza por agrupación: a) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ b) $2x^3 - x^2 + 4x - 2$ c) $a^3 - a^2b - ab + b^2$
- 3) Factoriza diferencia de cuadrados: a) $x^2 - 16$ b) $4a^2 - 49$ c) $9x^2 - 25y^2$ d) $x^4 - 81$
- 4) Factoriza trinomios cuadrados perfectos: a) $x^2 + 8x + 16$ b) $4a^2 - 20a + 25$ c) $9x^2 + 24x + 16$
- 5) Factoriza trinomios $x^2 + bx + c$: a) $x^2 + 5x + 6$ b) $x^2 - 7x + 12$ c) $x^2 + 2x - 8$ d) $x^2 - x - 20$
- 6) Factoriza trinomios $ax^2 + bx + c$: a) $2x^2 + 5x + 3$ b) $3x^2 - 7x + 2$ c) $6x^2 + x - 2$

7) Factoriza suma y diferencia de cubos: a) $x^3 + 1$ b) $x^3 - 8$ c) $8x^3 + 27$

SOLUCIONES

1) a) $4x(2x + 3)$ b) $5a^2(3a - 2)$ c) $6x^2(3x^2 - 4x + 1)$ d) $-3x(2x^2 - 3x + 1)$

2) a) $(x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = x^2(x + 2) + 3(x + 2) = (x^2 + 3)(x + 2)$ b) $(2x^3 - x^2) + (4x - 2) = x^2(2x - 1) + 2(2x - 1) = (x^2 + 2)(2x - 1)$ c) $(a^3 - a^2b) + (-ab + b^2) = a^2(a - b) - b(a - b) = (a^2 - b)(a - b)$

3) a) $(x + 4)(x - 4)$ b) $(2a + 7)(2a - 7)$ c) $(3x + 5y)(3x - 5y)$ d) $(x^2 + 9)(x^2 - 9) = (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

4) a) $(x + 4)^2$ b) $(2a - 5)^2$ c) $(3x + 4)^2$

5) a) $(x + 2)(x + 3)$ b) $(x - 3)(x - 4)$ c) $(x + 4)(x - 2)$ d) $(x - 5)(x + 4)$

6) a) $2x^2 + 5x + 3$: $a \cdot c = 6$, números 2 y 3 $2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x(x + 1) + 3(x + 1) = (2x + 3)(x + 1)$ b) $3x^2 - 7x + 2$: $a \cdot c = 6$, números -1 y -6 $3x^2 - x - 6x + 2 = x(3x - 1) - 2(3x - 1) = (x - 2)(3x - 1)$ c) $6x^2 + x - 2$: $a \cdot c = -12$, números 4 y -3 $6x^2 + 4x - 3x - 2 = 2x(3x + 2) - 1(3x + 2) = (2x - 1)(3x + 2)$

7) a) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ b) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ c) $8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 4

- Factorizar es lo inverso de multiplicar: convertir una suma en un producto de factores.
- Siempre empieza buscando un factor común en todos los términos; es el primer paso y el más olvidado.
- Con cuatro términos, prueba la agrupación: agrupa en pares, saca factor común de cada par y extrae el paréntesis repetido.
- Las formas especiales se reconocen de un vistazo: diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, trinomio cuadrado perfecto, y suma o diferencia de cubos.
- Para $x^2 + bx + c$ busca dos números que multiplicados den c y sumados den b ; para $ax^2 + bx + c$ con a distinto de 1, multiplica a por c y aplica lo mismo.
- Regla de oro: multiplica tu resultado para comprobar que regresa a la expresión original.

PARTE II: ECUACIONES

CAPÍTULO 5: ECUACIONES LINEALES

5.1 Definición de ecuación

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones donde aparece al menos una letra que no conocemos. A esa letra se le llama incógnita. Resolver la ecuación significa encontrar el valor (o los valores) de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Ese valor se llama solución o raíz.

La igualdad tiene dos lados:

* El miembro izquierdo: lo que está a la izquierda del signo igual. * El miembro derecho: lo que está a la derecha del signo igual.

Por ejemplo, en la ecuación $x + 5 = 9$, el miembro izquierdo es $x + 5$ y el miembro derecho es 9.

No cualquier número es solución. Para comprobarlo tienes que sustituir la incógnita y ver si la igualdad se cumple. Si se cumple, ese número sí es solución. Si no se cumple, no lo es. No hay de otra: la comprobación manda.

Ejemplo 1: Indica los miembros de la ecuación $3x - 4 = 11$ y comprueba si $x = 5$ es solución.

Solución: el miembro izquierdo es $3x - 4$ y el miembro derecho es 11. Sustituyo $x = 5$: $3 \times 5 - 4 = 15 - 4 = 11$. Como el resultado es 11, igual que el miembro derecho, la igualdad se cumple. Entonces $x = 5$ sí es solución de la ecuación.

Ejemplo 2: Comprueba si $x = 2$ es solución de $x + 8 = 13$.

Solución: sustituyo $x = 2$: $2 + 8 = 10$. El miembro derecho es 13. Como 10 no es igual a 13, la igualdad no se cumple. Entonces $x = 2$ no es solución de esa ecuación. El valor correcto sería $x = 5$, porque $5 + 8 = 13$.

Ejemplo 3: ¿Es $x = -3$ solución de $2x + 1 = -5$?

Solución: sustituyo $x = -3$: $2 \times (-3) + 1 = -6 + 1 = -5$. El miembro derecho es -5. La igualdad se cumple, entonces $x = -3$ sí es solución. Ojo con los signos: al multiplicar 2 por -3 sale -6, no 6. Los errores de signo son la causa número uno de respuestas mal.

Ejemplo 4: Escribe qué significa que $x = 7$ sea solución de la ecuación $4x - 9 = 19$.

Solución: significa que si sustituyes la x por 7, la igualdad se hace verdadera. Comprueba: $4 \times 7 - 9 = 28 - 9 = 19$. Como 19 es igual a 19, se confirma que $x = 7$ es la solución. Esto es exactamente lo que vas a hacer cada vez que termines de resolver: sustituir y comprobar.

Ejemplo 5: Comprueba si $x = -6$ es solución de la ecuación $2x = -12$.

Solución: sustituyo $x = -6$: $2 \times (-6) = -12$. El miembro derecho es -12. La igualdad se cumple, entonces $x = -6$ sí es solución. Cuando trabajes con negativos, escribe siempre el paréntesis: $2 \times (-6)$ se lee mejor que 2×-6 y evita que se te escape el signo.

5.2 Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado (también llamada ecuación lineal) es aquella donde la incógnita aparece elevada a la potencia 1, es decir, sin exponente. Su forma general es $ax + b = 0$, donde a y b son números y a no puede ser cero.

La característica principal es que una ecuación de primer grado con una incógnita tiene una sola solución. No dos, no cero. Una sola. Eso la hace predecible: si al final te salen dos valores distintos, algo hiciste mal.

Cómo se reconoce:

* La x aparece solo como x , nunca como x^2 ni como x^3 . * Si la x está dentro de una raíz o en un denominador, no es una ecuación lineal simple (ya lo verás después).

Ejemplo 1: Resuelve $2x + 6 = 14$.

Solución: hay que dejar la x sola. Primero quito el 6 pasando al otro lado restando: $2x = 14 - 6$, entonces $2x = 8$. Ahora quito el 2 pasando al otro lado dividiendo: $x = 8 / 2 = 4$. Comprobación: $2 \times 4 + 6 = 8 + 6 = 14$. La igualdad se cumple, la solución es $x = 4$.

Ejemplo 2: Resuelve $5x - 3 = 2x + 9$.

Solución: primero junto las x de un lado y los números del otro. Resto $2x$ en ambos lados: $5x - 2x - 3 = 9$, o sea $3x - 3 = 9$. Ahora sumo 3 en ambos lados: $3x = 12$. Divido entre 3: $x = 4$. Comprobación: miembro izquierdo: $5 \times 4 - 3 = 20 - 3 = 17$; miembro derecho: $2 \times 4 + 9 = 8 + 9 = 17$. Ambos lados dan 17, la solución es $x = 4$.

Ejemplo 3: Resuelve $-x + 2 = 7$.

Solución: paso el 2 restando: $-x = 7 - 2 = 5$. Ahora tengo $-x = 5$. Para que quede x positiva, multiplico por -1 ambos lados: $x = -5$. Comprobación: $-(-5) + 2 = 5 + 2 = 7$. Correcto, la solución es $x = -5$. Mucha gente se equivoca aquí y deja $-x = 5$ como respuesta. Eso está mal: la incógnita debe quedar positiva y sola.

Ejemplo 4: Resuelve $7 = 3x + 1$.

Solución: la incógnita puede estar en el lado derecho, no pasa nada. Resto 1 en ambos lados: $7 - 1 = 3x$, o sea $6 = 3x$. Divido entre 3: $x = 2$. Comprobación: $3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7$. La solución es $x = 2$.

Ejemplo 5: Resuelve $-5x = 20$.

Solución: aquí no hay números sueltos, solo el coeficiente. Divido ambos miembros entre -5 : $x = 20 / (-5) = -4$. Comprobación: $-5 \times (-4) = 20$. El miembro derecho es 20, la igualdad se cumple. La solución es $x = -4$. Cuando el coeficiente es negativo y el número del otro lado es positivo, el resultado sale negativo. Es aritmética pura, no hay truco.

5.3 Propiedades de las ecuaciones

Las ecuaciones se resuelven usando una idea muy simple: lo que le hagas a un miembro, tienes que hacérselo al otro. Así la igualdad se mantiene. Piensa en una balanza: si agregas peso a un lado, debes agregar lo mismo al otro para que no se desequilibre.

Las propiedades que usas son estas:

1. Si sumas o restas el mismo número en ambos miembros, la igualdad se mantiene: si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
2. Si multiplicas o divides ambos miembros por el mismo número (distinto de cero), la igualdad se mantiene: si $a = b$, entonces $a \times c = b \times c$ y $a / c = b / c$.

De aquí salen las reglas prácticas que ya usaste:

* Un término que suma en un miembro, pasa restando al otro. * Un término que resta en un miembro, pasa sumando al otro. * Un factor que multiplica a la incógnita, pasa dividiendo al otro. * Un divisor de la incógnita, pasa multiplicando al otro.

Cuidado: lo que se mueve de un lado al otro cambia de operación. Si sumaba, resta. Si multiplicaba, divide. Lo que NO cambia es el signo dentro del término: el término $2x$ sigue siendo $2x$, solo cambia la operación que lo une al resto.

Ejemplo 1: Justifica cada paso al resolver $x + 9 = 20$.

Solución: $x + 9 = 20$. Resto 9 en ambos miembros: $x + 9 - 9 = 20 - 9$ (propiedad de la resta). Simplifico: $x = 11$. Comprobación: $11 + 9 = 20$. La solución es $x = 11$. Aquí usaste la propiedad 1: restaste 9 de los dos lados.

Ejemplo 2: Justifica cada paso al resolver $x / 4 = 5$.

Solución: $x / 4 = 5$. Multiplico ambos miembros por 4: $(x / 4) \times 4 = 5 \times 4$ (propiedad de la multiplicación). Simplifico: $x = 20$. Comprobación: $20 / 4 = 5$. La solución es $x = 20$. Usaste la propiedad 2: multiplicaste los dos lados por 4.

Ejemplo 3: Explica por qué al pasar $3x$ del lado izquierdo al derecho, en la ecuación $3x + 2 = 10$, el $3x$ no cambia de signo pero sí cambia su operación.

Solución: la ecuación es $3x + 2 = 10$. Para quitar el $3x$ del lado izquierdo restas $3x$ en ambos lados: $3x + 2 - 3x = 10 - 3x$. Del lado izquierdo se cancela y queda $2 = 10 - 3x$. El término $3x$ pasó del lado izquierdo al derecho y ahora resta en lugar de sumar. No cambió su signo interno: sigue siendo $3x$ positiva, solo que ahora la operación que la une es una resta. Esa es la regla de oro: se mueve el término completo y se invierte su operación.

Ejemplo 4: Indica el error en este desarrollo: $2x = 10$, entonces $x = 10 - 2 = 8$.

Solución: el error está en el último paso. El 2 está multiplicando a la x , no sumando. Al pasarlo al otro lado debe dividir, no restar. Lo correcto es $x = 10 / 2 = 5$. Comprobación del valor correcto: $2 \times 5 = 10$. El 8 es incorrecto porque $2 \times 8 = 16$, no 10. Regla para no fallar: primero identifica qué operación une el número con la x , y luego aplica la operación contraria.

Ejemplo 5: Justifica por qué en $4x + 8 = 24$ puedes dividir todos los términos entre 4 antes de despejar.

Solución: por la propiedad de la multiplicación y la división, puedes dividir ambos miembros entre el mismo número. Divido todo entre 4: $(4x)/4 + 8/4 = 24/4$, o sea $x + 2 = 6$. Ahora resto 2: $x = 4$. Comprobación: $4 \times 4 + 8 = 16 + 8 = 24$. La solución es $x = 4$. Dividir primero simplifica los números y reduces el riesgo de error. Úsalo cuando todos los términos sean múltiplos del mismo número.

5.4 Resolución paso a paso

Resolver una ecuación lineal tiene un orden de pasos que siempre funciona. Síguelo sin saltarte ninguno y no te vas a perder:

Paso 1: elimina paréntesis y fracciones si los hay (secciones 5.5 y 5.6). Paso 2: pasa todos los términos con x a un miembro y todos los números al otro. Paso 3: reduce términos semejantes

en cada lado. Paso 4: despeja la x pasando el coeficiente dividiendo (o multiplicando). Paso 5: comprueba sustituyendo en la ecuación original.

Ejemplo 1: Resuelve $4x - 7 = 2x + 5$.

Solución: paso 2: paso el $2x$ restando al lado izquierdo y el -7 sumando al derecho: $4x - 2x = 5 + 7$. Paso 3: reduzco: $2x = 12$. Paso 4: divido entre 2: $x = 12 / 2 = 6$. Paso 5: compruebo. Miembro izquierdo: $4 \times 6 - 7 = 24 - 7 = 17$. Miembro derecho: $2 \times 6 + 5 = 12 + 5 = 17$. Ambos dan 17. La solución es $x = 6$.

Ejemplo 2: Resuelve $3x + 8 = 5x - 6$.

Solución: paso 2: $3x - 5x = -6 - 8$. Paso 3: $-2x = -14$. Paso 4: divido entre -2 : $x = (-14) / (-2) = 7$. Paso 5: compruebo. Miembro izquierdo: $3 \times 7 + 8 = 21 + 8 = 29$. Miembro derecho: $5 \times 7 - 6 = 35 - 6 = 29$. Ambos dan 29. La solución es $x = 7$. Fíjate que menos entre menos da más: el resultado es positivo.

Ejemplo 3: Resuelve $10 - 2x = 4x + 4$.

Solución: paso 2: paso $-2x$ sumando a la derecha y 4 sumando a la izquierda: $10 - 4 = 4x + 2x$. Paso 3: $6 = 6x$. Paso 4: divido entre 6: $x = 6 / 6 = 1$. Paso 5: compruebo. Miembro izquierdo: $10 - 2 \times 1 = 10 - 2 = 8$. Miembro derecho: $4 \times 1 + 4 = 4 + 4 = 8$. La solución es $x = 1$.

Ejemplo 4: Resuelve $6x + 3 = 6x - 5$.

Solución: paso 2: $6x - 6x = -5 - 3$. Paso 3: $0 = -8$. Esto es una contradicción: 0 nunca es igual a -8 . Significa que la ecuación no tiene solución. No existe ningún valor de x que haga verdadera esa igualdad, porque la x se canceló por completo. Cuando la incógnita desaparece y queda una igualdad falsa, la ecuación es imposible. Cuando desaparece y queda una igualdad verdadera (como $0 = 0$), la ecuación tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 5: Resuelve $5x + 4 = 2x - 5$.

Solución: paso 2: $5x - 2x = -5 - 4$, o sea $3x = -9$. Paso 3: ya está reducida. Paso 4: divido entre 3: $x = -9 / 3 = -3$. Paso 5: compruebo. Miembro izquierdo: $5 \times (-3) + 4 = -15 + 4 = -11$. Miembro derecho: $2 \times (-3) - 5 = -6 - 5 = -11$. Ambos dan -11 . La solución es $x = -3$. Los resultados negativos son tan válidos como los positivos: la comprobación es la que decide.

5.5 Ecuaciones con paréntesis

Cuando la ecuación tiene paréntesis, lo primero es eliminarlos. Se hace multiplicando el número de afuera por cada término de adentro. Esa es la propiedad distributiva que ya conoces. Recién después de quitar los paréntesis sigues con los pasos normales.

Reglas clave:

* $a(b + c) = a \times b + a \times c$. * Si hay un signo menos antes del paréntesis, cambia el signo de cada término de adentro: $-(b - c) = -b + c$. * Si hay varios paréntesis, quítalos uno por uno, sin prisa.

Ejemplo 1: Resuelve $3(x + 2) = 15$.

Solución: quito el paréntesis multiplicando: $3 \times x + 3 \times 2 = 15$, o sea $3x + 6 = 15$. Resto 6: $3x = 9$. Divido entre 3: $x = 3$. Comprobación: $3(3 + 2) = 3 \times 5 = 15$. La solución es $x = 3$. También podías dividir entre 3 desde el inicio: $x + 2 = 5$, $x = 3$. Los dos caminos llegan al mismo lugar.

Ejemplo 2: Resuelve $2(x - 1) = 4x - 6$.

Solución: quito el paréntesis: $2x - 2 = 4x - 6$. Paso términos con x a la izquierda: $2x - 4x = -6 + 2$. Reduzco: $-2x = -4$. Divido entre -2 : $x = 2$. Comprobación: miembro izquierdo: $2(2 - 1) = 2 \times 1 = 2$; miembro derecho: $4 \times 2 - 6 = 8 - 6 = 2$. La solución es $x = 2$.

Ejemplo 3: Resuelve $5(2x + 1) - 3(x - 4) = 4x + 25$.

Solución: quito el primer paréntesis: $10x + 5$. Quito el segundo con cuidado, el menos cambia los signos: $-3x + 12$. La ecuación queda: $10x + 5 - 3x + 12 = 4x + 25$. Reduzco la izquierda: $7x + 17 = 4x + 25$. Paso términos: $7x - 4x = 25 - 17$, o sea $3x = 8$. Divido: $x = 8 / 3$. Comprobación con fracción: miembro izquierdo: $5(2 \times (8/3) + 1) - 3((8/3) - 4) = 5(16/3 + 3/3) - 3(8/3 - 12/3) = 5(19/3) - 3(-4/3) = 95/3 + 12/3 = 107/3$. Miembro derecho: $4 \times (8/3) + 25 = 32/3 + 75/3 = 107/3$. Ambos dan $107/3$. La solución es $x = 8/3$. Cuando el resultado es fracción, no te asustes: trabaja con fracciones hasta el final y comprueba igual.

Ejemplo 4: Resuelve $2(x + 3) + x = 5(x - 1) + 8$.

Solución: quito paréntesis: $2x + 6 + x = 5x - 5 + 8$. Reduzco cada lado: $3x + 6 = 5x + 3$. Paso términos: $3x - 5x = 3 - 6$, o sea $-2x = -3$. Divido entre -2 : $x = (-3) / (-2) = 3/2$. Comprobación: miembro izquierdo: $2(3/2 + 3) + 3/2 = 2(9/2) + 3/2 = 9 + 3/2 = 21/2$; miembro derecho: $5(3/2 - 1) + 8 = 5(1/2) + 8 = 5/2 + 16/2 = 21/2$. La solución es $x = 3/2$.

5.6 Ecuaciones con fracciones

Las fracciones se eliminan multiplicando toda la ecuación por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores. Al multiplicar cada término por el mcm, los denominadores se cancelan y te queda una ecuación sin fracciones, que ya sabes resolver.

Procedimiento:

Paso 1: encuentra el mcm de todos los denominadores. Paso 2: multiplica cada término de la ecuación por ese mcm. Paso 3: simplifica y resuelve la ecuación resultante. Paso 4: comprueba en la ecuación original con las fracciones.

Ejemplo 1: Resuelve $x/3 + 1 = 4$.

Solución: el único denominador es 3, así que multiplico todo por 3: $3 \times (x/3) + 3 \times 1 = 3 \times 4$. Simplifico: $x + 3 = 12$. Resto 3: $x = 9$. Comprobación: $9/3 + 1 = 3 + 1 = 4$. La solución es $x = 9$.

Ejemplo 2: Resuelve $(2x)/5 - 1 = 3$.

Solución: multiplico todo por 5: $5 \times (2x/5) - 5 \times 1 = 5 \times 3$. Simplifico: $2x - 5 = 15$. Sumo 5: $2x = 20$. Divido entre 2: $x = 10$. Comprobación: $(2 \times 10)/5 - 1 = 20/5 - 1 = 4 - 1 = 3$. La solución es $x = 10$.

Ejemplo 3: Resuelve $(x + 2)/4 = (x - 1)/3$.

Solución: los denominadores son 4 y 3, el mcm es 12. Multiplico todo por 12: $12 \times (x + 2)/4 = 12 \times (x - 1)/3$. Simplifico: $3(x + 2) = 4(x - 1)$. Quito paréntesis: $3x + 6 = 4x - 4$. Paso términos: $3x - 4x = -4 - 6$, o sea $-x = -10$. Multiplico por -1: $x = 10$. Comprobación: miembro izquierdo: $(10 + 2)/4 = 12/4 = 3$; miembro derecho: $(10 - 1)/3 = 9/3 = 3$. La solución es $x = 10$.

Ejemplo 4: Resuelve $x/2 + x/3 = 5 - x/6$.

Solución: los denominadores son 2, 3 y 6. El mcm es 6. Multiplico todo por 6: $6 \times (x/2) + 6 \times (x/3) = 6 \times 5 - 6 \times (x/6)$. Simplifico: $3x + 2x = 30 - x$. Reduzco: $5x = 30 - x$. Paso la x: $5x + x = 30$, o sea $6x = 30$. Divido entre 6: $x = 5$. Comprobación: $5/2 + 5/3 = 15/6 + 10/6 = 25/6$; $5 - 5/6 = 30/6 - 5/6 = 25/6$. Ambos dan $25/6$. La solución es $x = 5$.

5.7 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 5

1) Resuelve estas ecuaciones básicas: a) $x + 7 = 12$ b) $5x = 45$ c) $x - 4 = 10$

2) Resuelve pasando términos de un lado a otro: a) $2x + 3 = 11$ b) $7x - 5 = 3x + 7$ c) $9 - 4x = 1$

3) Resuelve las ecuaciones con paréntesis: a) $4(x - 2) = 8$ b) $3(x + 1) = 2(x + 4)$ c) $2(x + 5) + 3x = x + 10$

4) Resuelve las ecuaciones con fracciones: a) $x/4 + 2 = 5$ b) $(3x)/2 - 5 = 4$ c) $(x - 3)/2 = (x + 1)/4$

5) El doble de un número más 5 es igual a 25. ¿Cuál es el número?

6) La suma de dos números consecutivos es 51. Encuentra los dos números.

7) Resuelve $(2x + 1)/3 - (x - 1)/2 = 1$.

8) Resuelve $3(x - 2) + 2(x + 1) = 4(x - 5) + 22$.

9) Indica si la ecuación tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna solución: a) $2(x + 3) = 2x + 6$ b) $3(x + 2) = 3x + 5$

10) Un rectángulo tiene perímetro de 36 cm y su largo mide el doble que su ancho. Encuentra las dimensiones del rectángulo.

SOLUCIONES

1a) $x + 7 = 12$. Resto 7 en ambos lados: $x = 12 - 7 = 5$. Comprobación: $5 + 7 = 12$. Solución: $x = 5$.

1b) $5x = 45$. Divido entre 5: $x = 45 / 5 = 9$. Comprobación: $5 \times 9 = 45$. Solución: $x = 9$.

1c) $x - 4 = 10$. Sumo 4 en ambos lados: $x = 10 + 4 = 14$. Comprobación: $14 - 4 = 10$. Solución: $x = 14$.

2a) $2x + 3 = 11$. Resto 3: $2x = 8$. Divido entre 2: $x = 4$. Comprobación: $2 \times 4 + 3 = 11$. Solución: $x = 4$.

2b) $7x - 5 = 3x + 7$. Paso términos: $7x - 3x = 7 + 5$, o sea $4x = 12$. Divido entre 4: $x = 3$. Comprobación: izquierda: $7 \times 3 - 5 = 16$; derecha: $3 \times 3 + 7 = 16$. Solución: $x = 3$.

2c) $9 - 4x = 1$. Paso el 9 restando: $-4x = 1 - 9 = -8$. Divido entre -4: $x = (-8) / (-4) = 2$. Comprobación: $9 - 4 \times 2 = 9 - 8 = 1$. Solución: $x = 2$.

3a) $4(x - 2) = 8$. Quito el paréntesis: $4x - 8 = 8$. Sumo 8: $4x = 16$. Divido entre 4: $x = 4$. Comprobación: $4(4 - 2) = 4 \times 2 = 8$. Solución: $x = 4$.

3b) $3(x + 1) = 2(x + 4)$. Quito paréntesis: $3x + 3 = 2x + 8$. Paso términos: $3x - 2x = 8 - 3$, o sea $x = 5$. Comprobación: izquierda: $3(5 + 1) = 18$; derecha: $2(5 + 4) = 18$. Solución: $x = 5$.

3c) $2(x + 5) + 3x = x + 10$. Quito el paréntesis: $2x + 10 + 3x = x + 10$. Reduzco: $5x + 10 = x + 10$. Paso términos: $5x - x = 10 - 10$, o sea $4x = 0$. Divido entre 4: $x = 0$. Comprobación: $2(0 + 5) + 0 = 10$; $0 + 10 = 10$. Solución: $x = 0$.

4a) $x/4 + 2 = 5$. Multiplico todo por 4: $x + 8 = 20$. Resto 8: $x = 12$. Comprobación: $12/4 + 2 = 3 + 2 = 5$. Solución: $x = 12$.

4b) $(3x)/2 - 5 = 4$. Multiplico todo por 2: $3x - 10 = 8$. Sumo 10: $3x = 18$. Divido entre 3: $x = 6$. Comprobación: $(3 \times 6)/2 - 5 = 18/2 - 5 = 9 - 5 = 4$. Solución: $x = 6$.

4c) $(x - 3)/2 = (x + 1)/4$. Multiplico todo por 4: $2(x - 3) = x + 1$. Quito el paréntesis: $2x - 6 = x + 1$. Paso términos: $2x - x = 1 + 6$, o sea $x = 7$. Comprobación: $(7 - 3)/2 = 4/2 = 2$; $(7 + 1)/4 = 8/4 = 2$. Solución: $x = 7$.

5) Sea x el número. El doble más 5: $2x + 5 = 25$. Resto 5: $2x = 20$. Divido entre 2: $x = 10$. Comprobación: $2 \times 10 + 5 = 25$. El número es 10.

6) Sea x el primer número, entonces $x + 1$ es el siguiente. La suma es: $x + (x + 1) = 51$. Reduzco: $2x + 1 = 51$. Resto 1: $2x = 50$. Divido entre 2: $x = 25$. El segundo número es $25 + 1 = 26$. Comprobación: $25 + 26 = 51$. Los números son 25 y 26.

7) $(2x + 1)/3 - (x - 1)/2 = 1$. Los denominadores son 3 y 2, el mcm es 6. Multiplico todo por 6: $2(2x + 1) - 3(x - 1) = 6$. Quito paréntesis: $4x + 2 - 3x + 3 = 6$. Reduzco: $x + 5 = 6$. Resto 5: $x = 1$. Comprobación: $(2 \times 1 + 1)/3 - (1 - 1)/2 = 3/3 - 0/2 = 1 - 0 = 1$. Solución: $x = 1$.

8) $3(x - 2) + 2(x + 1) = 4(x - 5) + 22$. Quito paréntesis: $3x - 6 + 2x + 2 = 4x - 20 + 22$. Reduzco cada lado: $5x - 4 = 4x + 2$. Paso términos: $5x - 4x = 2 + 4$, o sea $x = 6$. Comprobación: izquierda: $3(6 - 2) + 2(6 + 1) = 3 \times 4 + 2 \times 7 = 12 + 14 = 26$; derecha: $4(6 - 5) + 22 = 4 \times 1 + 22 = 26$. Solución: $x = 6$.

9a) $2(x + 3) = 2x + 6$. Quito el paréntesis: $2x + 6 = 2x + 6$. Paso términos: $2x - 2x = 6 - 6$, o sea $0 = 0$. La incógnita desapareció y quedó una igualdad verdadera: la ecuación se cumple para cualquier valor de x . Tiene infinitas soluciones, es una identidad.

9b) $3(x + 2) = 3x + 5$. Quito el paréntesis: $3x + 6 = 3x + 5$. Paso términos: $3x - 3x = 5 - 6$, o sea $0 = -1$. La incógnita desapareció y quedó una contradicción: no existe ningún valor de x que la cumpla. No tiene solución.

10) Sea x el ancho, entonces el largo es $2x$. El perímetro es dos veces la suma de largo y ancho: $2(x + 2x) = 36$. Simplifico dentro del paréntesis: $2(3x) = 36$, o sea $6x = 36$. Divido entre 6: $x = 6$. El ancho mide 6 cm y el largo mide $2 \times 6 = 12$ cm. Comprobación: $2(6 + 12) = 2 \times 18 = 36$. Las dimensiones son 6 cm de ancho y 12 cm de largo.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 5

- Una ecuación es una igualdad con una incógnita; resolverla es hallar el valor que la hace verdadera, y comprobarla es sustituir ese valor en la ecuación original.
- Una ecuación de primer grado ($ax + b = 0$, con a distinto de cero) tiene exactamente una solución.
- Para despejar usa operaciones inversas en ambos lados: lo que suma pasa restando, lo que multiplica pasa dividiendo.
- Si hay paréntesis, primero distribuye; si hay fracciones, multiplica todo por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- El error número uno son los signos: trabaja despacio con los negativos y comprueba siempre al final.

CAPÍTULO 6: ECUACIONES CUADRÁTICAS

6.1 Definición de ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática (o de segundo grado) es una ecuación donde la incógnita aparece elevada al cuadrado. Su forma general es $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c son números y a no puede ser cero. Si a fuera cero, el término x^2 desaparecería y la ecuación dejaría de ser cuadrática.

Los elementos se llaman así:

- * a : coeficiente cuadrático (el que multiplica a x^2).
- * b : coeficiente lineal (el que multiplica a x).
- * c : término independiente (el número sin x).

La diferencia grande con las ecuaciones lineales: una ecuación cuadrática puede tener hasta dos soluciones, y se llaman raíces. Nunca tiene más de dos.

Ejemplo 1: Identifica a , b y c en la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Solución: comparo con $ax^2 + bx + c = 0$. El número que multiplica a x^2 es 2, entonces $a = 2$. El que multiplica a x es -7, entonces $b = -7$. El término sin x es 3, entonces $c = 3$. Cuidado con los signos: b es -7, no 7.

Ejemplo 2: Resuelve $x^2 = 25$.

Solución: esta es cuadrática pura, sin término en x . Busco los números que al elevarlos al cuadrado dan 25: $5^2 = 25$ y también $(-5)^2 = 25$. Entonces tiene dos raíces: $x = 5$ y $x = -5$. En corto: $x = \pm 5$. Comprobación: $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$. Ambas cumplen. Aquí ves por qué una cuadrática puede tener dos soluciones: el cuadrado borra el signo.

Ejemplo 3: Resuelve $x^2 - 9 = 0$.

Solución: paso el -9 sumando: $x^2 = 9$. Las raíces son los números cuyo cuadrado es 9: $x = 3$ y $x = -3$. Comprobación: $3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$; $(-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$. Las dos raíces son $x = 3$ y $x = -3$.

Ejemplo 4: ¿Es $3x^2 + 2 = 0$ una ecuación cuadrática? ¿Tiene raíces reales?

Solución: sí es cuadrática: $a = 3$, $b = 0$ (no hay término en x) y $c = 2$. Despejo: $3x^2 = -2$, $x^2 = -2/3$. Ningún número real elevado al cuadrado da un resultado negativo, así que esta ecuación no tiene raíces reales. Esto es válido y normal: no todas las cuadráticas tienen soluciones reales. La sección 6.5 explica cómo saberlo antes de intentar resolver.

6.2 Factorización

Factorizar una ecuación cuadrática es escribirla como producto de dos factores igualados a cero. Si un producto es igual a cero, entonces al menos uno de sus factores es cero. Esa es la propiedad del producto cero: si $p \times q = 0$, entonces $p = 0$ o $q = 0$.

Para factorizar $ax^2 + bx + c$ necesitas dos números que multiplicados den $a \times c$ y sumados den b (cuando $a = 1$ es todavía más directo: dos números que multiplicados den c y sumados den b).

Procedimiento:

Paso 1: iguala la ecuación a cero. Paso 2: factoriza el trinomio. Paso 3: iguala cada factor a cero y despeja. Paso 4: comprueba cada raíz sustituyendo en la ecuación original.

Ejemplo 1: Resuelve $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Solución: busco dos números que multiplicados den 6 y sumados den 5: son 2 y 3 ($2 \times 3 = 6$, $2 + 3 = 5$). Factorizo: $(x + 2)(x + 3) = 0$. Igualo cada factor a cero: $x + 2 = 0$ da $x = -2$; $x + 3 = 0$ da $x = -3$. Comprobación: $(-2)^2 + 5(-2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$; $(-3)^2 + 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$. Las raíces son $x = -2$ y $x = -3$.

Ejemplo 2: Resuelve $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Solución: busco dos números que multiplicados den 10 y sumados den -7: son -2 y -5 ($(-2) \times (-5) = 10$, $-2 + (-5) = -7$). Factorizo: $(x - 2)(x - 5) = 0$. Entonces $x - 2 = 0$ da $x = 2$; $x - 5 = 0$ da $x = 5$. Comprobación: $2^2 - 7(2) + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$; $5^2 - 7(5) + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$. Las raíces son $x = 2$ y $x = 5$. Cuando b es negativo y c positivo, los dos números de la factorización salen negativos. No te confundas con eso.

Ejemplo 3: Resuelve $x^2 - 4x = 0$.

Solución: aquí no hay término independiente, así que saco factor común x : $x(x - 4) = 0$. Igualo cada factor a cero: $x = 0$ o $x - 4 = 0$, que da $x = 4$. Comprobación: $0^2 - 4(0) = 0$; $4^2 - 4(4) = 16 - 16 = 0$. Las raíces son $x = 0$ y $x = 4$. Cuando falta el término independiente, el factor común es el camino rápido.

Ejemplo 4: Resuelve $4x^2 - 25 = 0$.

Solución: esto es una diferencia de cuadrados: $(2x)^2 - 5^2 = 0$. Factorizo como $(2x - 5)(2x + 5) = 0$. Entonces $2x - 5 = 0$ da $x = 5/2$; $2x + 5 = 0$ da $x = -5/2$. Comprobación: $4(5/2)^2 - 25 = 4(25/4) - 25 = 25 - 25 = 0$; $4(-5/2)^2 - 25 = 25 - 25 = 0$. Las raíces son $x = 5/2$ y $x = -5/2$.

Ejemplo 5: Resuelve $2x^2 - x - 3 = 0$ por factorización.

Solución: aquí $a = 2$, no es 1, así que factorizo por agrupación. Busco dos números que multiplicados den $2 \times (-3) = -6$ y sumados den -1 : son -3 y 2 . Reescribo el término del medio: $2x^2 - 3x + 2x - 3 = 0$. Agrupo: $x(2x - 3) + 1(2x - 3) = 0$. Factor común: $(2x - 3)(x + 1) = 0$. Entonces $2x - 3 = 0$ da $x = 3/2$; $x + 1 = 0$ da $x = -1$. Comprobación con $x = 3/2$: $2(9/4) - 3(3/2) - 3 = 9/2 - 9/2 - 6/2 = 0$. Comprobación con $x = -1$: $2(1) - (-1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$. Las raíces son $x = 3/2$ y $x = -1$.

6.3 Método de la fórmula general

No todas las cuadráticas se pueden factorizar con números enteros. Para esos casos existe la fórmula general, que funciona siempre:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solo necesitas identificar a , b y c , sustituirlos con sus signos y simplificar. Es mecánica pura: si sigues los pasos con cuidado, no falla.

Procedimiento:

Paso 1: escribe la ecuación igualada a cero e identifica a , b y c . Paso 2: calcula $b^2 - 4ac$.

Paso 3: sustituye en la fórmula y simplifica. Paso 4: escribe las dos raíces y comprueba.

Ejemplo 1: Resuelve $x^2 + 5x + 6 = 0$ con la fórmula general.

Solución: $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$. Calculo $b^2 - 4ac = 25 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$. Sustituyo: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$. Las dos raíces: $x = \frac{-5 + 1}{2} = -4/2 = -2$; $x = \frac{-5 - 1}{2} = -6/2 = -3$. Son las mismas que salieron por factorización en la sección 6.2. La fórmula confirma lo que ya sabías.

Ejemplo 2: Resuelve $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

Solución: $a = 2$, $b = 7$, $c = 3$. Calculo $b^2 - 4ac = 49 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$. Sustituyo: $x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4}$. Raíz 1: $\frac{-7 + 5}{4} = -2/4 = -1/2$. Raíz 2: $\frac{-7 - 5}{4} = -12/4 = -3$. Comprobación con $x = -1/2$: $2(1/4) + 7(-1/2) + 3 = 1/2 - 7/2 + 3 = -6/2 + 3 = -3 + 3 = 0$. Comprobación con $x = -3$: $2(9) + 7(-3) + 3 = 18 - 21 + 3 = 0$. Las raíces son $x = -1/2$ y $x = -3$.

Ejemplo 3: Resuelve $3x^2 - 2x - 8 = 0$.

Solución: $a = 3$, $b = -2$, $c = -8$. Calculo $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-8) = 4 + 96 = 100$. Sustituyo: $x = (2 \pm \sqrt{100}) / 6 = (2 \pm 10) / 6$. Raíz 1: $(2 + 10)/6 = 12/6 = 2$. Raíz 2: $(2 - 10)/6 = -8/6 = -4/3$. Comprobación con $x = 2$: $3(4) - 2(2) - 8 = 12 - 4 - 8 = 0$. Comprobación con $x = -4/3$: $3(16/9) - 2(-4/3) - 8 = 48/9 + 8/3 - 8 = 16/3 + 8/3 - 24/3 = 0$. Las raíces son $x = 2$ y $x = -4/3$. Ojo: $-b$ con $b = -2$ queda $-(-2) = 2$. El signo de b se invierte en la fórmula.

Ejemplo 4: Resuelve $x^2 + x - 1 = 0$.

Solución: $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$. Calculo $b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5$. Sustituyo: $x = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$. Las raíces quedan con raíz cuadrada: $x = (-1 + \sqrt{5})/2$ y $x = (-1 - \sqrt{5})/2$. No todo sale exacto: cuando $\sqrt{}$ no es entero, la raíz se deja indicada. Comprobación aproximada con $\sqrt{5} \sim 2.236$: $x_1 \sim 0.618$. Sustituyo: $0.618^2 + 0.618 - 1 \sim 0.382 + 0.618 - 1 = 0$. Cuadra. Esta es la ecuación del número de oro, por si te suena.

6.4 Completar el cuadrado

Completar el cuadrado es una técnica para convertir el trinomio en un binomio al cuadrado. Es la base de donde sale la fórmula general, y también sirve para resolver ecuaciones directamente. La idea: sumar a ambos lados el número que convierte $x^2 + bx$ en un cuadrado perfecto.

Regla: si tienes $x^2 + bx$, sumas $(b/2)^2$ en ambos lados. Entonces $x^2 + bx + (b/2)^2 = (x + b/2)^2$.

Procedimiento:

Paso 1: pasa el término independiente al otro lado. Paso 2: suma $(b/2)^2$ en ambos lados (si a no es 1, primero divide todo entre a). Paso 3: escribe el lado izquierdo como un binomio al cuadrado. Paso 4: saca raíz cuadrada en ambos lados (con $\pm$) y despeja.

Ejemplo 1: Resuelve $x^2 + 6x + 5 = 0$ completando el cuadrado.

Solución: paso 1: $x^2 + 6x = -5$. Paso 2: $b = 6$, entonces $(b/2)^2 = 3^2 = 9$. Sumo 9 en ambos lados: $x^2 + 6x + 9 = -5 + 9 = 4$. Paso 3: el lado izquierdo es un cuadrado perfecto: $(x + 3)^2 = 4$. Paso 4: saco raíz: $x + 3 = \pm 2$. Entonces $x = -3 + 2 = -1$ o $x = -3 - 2 = -5$. Comprobación: $(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$; $(-5)^2 + 6(-5) + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$. Las raíces son $x = -1$ y $x = -5$.

Ejemplo 2: Resuelve $x^2 - 4x - 1 = 0$.

Solución: paso 1: $x^2 - 4x = 1$. Paso 2: $(b/2)^2 = (-2)^2 = 4$. Sumo 4 en ambos lados: $x^2 - 4x + 4 = 5$. Paso 3: $(x - 2)^2 = 5$. Paso 4: $x - 2 = \pm \sqrt{5}$, entonces $x = 2 + \sqrt{5}$ o $x = 2 - \sqrt{5}$.

Comprobación aproximada con $\sqrt{5} \sim 2.236$: $x_1 \sim 4.236$. Sustituyo: $4.236^2 - 4(4.236) - 1 \sim 17.944 - 16.944 - 1 = 0$. Cuadra. Las raíces son $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

Ejemplo 3: Resuelve $2x^2 + 8x + 6 = 0$ completando el cuadrado.

Solución: primero divido todo entre $a = 2$ para que el coeficiente de x^2 sea 1: $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Paso 1: $x^2 + 4x = -3$. Paso 2: $(b/2)^2 = 2^2 = 4$. Sumo 4 en ambos lados: $x^2 + 4x + 4 = 1$.
Paso 3: $(x + 2)^2 = 1$. Paso 4: $x + 2 = \pm 1$, entonces $x = -2 + 1 = -1$ o $x = -2 - 1 = -3$.
Comprobación: $2(-1)^2 + 8(-1) + 6 = 2 - 8 + 6 = 0$; $2(-3)^2 + 8(-3) + 6 = 18 - 24 + 6 = 0$. Las raíces son $x = -1$ y $x = -3$. Si a no es 1, dividir primero te ahorra trabajar con fracciones.

Ejemplo 4: Resuelve $x^2 + 10x + 25 = 0$.

Solución: este trinomio ya es un cuadrado perfecto, no hay nada que completar: $(x + 5)^2 = 0$.
Entonces $x + 5 = 0$, $x = -5$. Es raíz doble: las dos soluciones coinciden en el mismo valor.
Comprobación: $(-5)^2 + 10(-5) + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$. La raíz es $x = -5$ (doble). Cuando el discriminante es cero, siempre pasa esto.

Ejemplo 5: Resuelve $x^2 + 2x - 8 = 0$ completando el cuadrado.

Solución: paso 1: $x^2 + 2x = 8$. Paso 2: $(b/2)^2 = 1^2 = 1$. Sumo 1 en ambos lados: $x^2 + 2x + 1 = 9$. Paso 3: $(x + 1)^2 = 9$. Paso 4: $x + 1 = \pm 3$, entonces $x = -1 + 3 = 2$ o $x = -1 - 3 = -4$.
Comprobación: $4 + 4 - 8 = 0$; $16 - 8 - 8 = 0$. Las raíces son $x = 2$ y $x = -4$. Fíjate que también se puede factorizar: $(x + 4)(x - 2) = 0$. Los dos métodos llegan al mismo resultado, usa el que te salga más rápido.

6.5 El discriminante

El discriminante es la parte de la fórmula general que está dentro de la raíz: $D = b^2 - 4ac$. Antes de resolver, te dice cuántas raíces reales tiene la ecuación y de qué tipo:

* Si $D > 0$: hay dos raíces reales distintas. * Si $D = 0$: hay una sola raíz real (doble, se repite). * Si $D < 0$: no hay raíces reales (la raíz cuadrada de un número negativo no existe en los reales).

Es un diagnóstico rápido. Calculas D primero y ya sabes qué esperar del resultado. Si te sale negativo, no pierdas tiempo buscando raíces reales: no las hay.

Ejemplo 1: Analiza $x^2 + 5x + 6 = 0$ con el discriminante.

Solución: $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$. $D = 25 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$. Como $D = 1 > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas. Ya las conoces de antes: $x = -2$ y $x = -3$. El discriminante lo confirma sin resolver.

Ejemplo 2: Analiza $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solución: $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$. $D = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$. Como $D = 0$, hay una sola raíz real (doble). La encuentro: $(x - 3)^2 = 0$, $x = 3$. Comprobación: $9 - 18 + 9 = 0$. La raíz es $x = 3$ (doble).

Ejemplo 3: Analiza $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Solución: $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$. $D = 4 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$. Como $D < 0$, la ecuación no tiene raíces reales. Si intentas la fórmula, te topas con $\sqrt{-16}$, que no existe en los números reales. Punto final: sin raíces reales.

Ejemplo 4: Analiza $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Solución: $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$. $D = 4 - 4(3)(-1) = 4 + 12 = 16$. Como $D = 16 > 0$, hay dos raíces reales distintas. Las calculo para confirmar: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$. Raíz 1: $\frac{-2 + 4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Raíz 2: $\frac{-2 - 4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$. Comprobación con $x = 1/3$: $3(1/9) + 2(1/3) - 1 = 1/3 + 2/3 - 1 = 0$. Comprobación con $x = -1$: $3(1) + 2(-1) - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$. Las raíces son $x = 1/3$ y $x = -1$.

6.6 Relaciones entre las raíces y los coeficientes

Las raíces de una cuadrática no son independientes de los coeficientes: están ligadas por dos fórmulas directas. Si x_1 y x_2 son las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

* Suma de raíces: $x_1 + x_2 = -b/a$. * Producto de raíces: $x_1 \times x_2 = c/a$.

Estas relaciones sirven para dos cosas: comprobar si tus raíces están bien sin sustituir, y construir una ecuación cuando te dan las raíces que debe tener.

Ejemplo 1: Verifica las raíces de $x^2 + 5x + 6 = 0$ usando las relaciones.

Solución: $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$. Las raíces son $x_1 = -2$ y $x_2 = -3$. Suma: $-2 + (-3) = -5$. La fórmula dice $-b/a = -5/1 = -5$. Coincide. Producto: $(-2) \times (-3) = 6$. La fórmula dice $c/a = 6/1 = 6$. Coincide. Las raíces están bien. Úsalo como comprobación rápida después de resolver.

Ejemplo 2: Sin resolver, encuentra la suma y el producto de las raíces de $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

Solución: $a = 2$, $b = 7$, $c = 3$. Suma: $x_1 + x_2 = -b/a = -7/2$. Producto: $x_1 \times x_2 = c/a = 3/2$. Verifico con las raíces que ya conoces: $x_1 = -3$, $x_2 = -1/2$. Suma: $-3 + (-1/2) = -7/2$. Correcto. Producto: $(-3) \times (-1/2) = 3/2$. Correcto. No hizo falta resolver nada para obtener la suma y el producto.

Ejemplo 3: Construye una ecuación cuadrática cuyas raíces sean $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$.

Solución: suma de raíces: $4 + (-2) = 2$. Producto: $4 \times (-2) = -8$. Uso las fórmulas al revés: $-b/a = 2$ y $c/a = -8$. Tomo $a = 1$, entonces $b = -2$ y $c = -8$. La ecuación es $x^2 - 2x - 8 = 0$. Comprobación: con $x = 4$: $16 - 8 - 8 = 0$; con $x = -2$: $4 + 4 - 8 = 0$. La ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$ tiene raíces 4 y -2.

Ejemplo 4: Una raíz de $x^2 - 5x + 6 = 0$ es $x_1 = 2$. Encuentra la otra raíz sin resolver la ecuación.

Solución: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$. Por el producto de raíces: $x_1 \times x_2 = c/a = 6$. Entonces $2 \times x_2 = 6$, de donde $x_2 = 3$. Verifico con la suma: $x_1 + x_2 = -b/a = 5$. $2 + 3 = 5$. Correcto. La otra raíz es $x_2 = 3$. Si en un examen te dan una raíz, la otra sale en un paso con esta relación.

6.7 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 6

- 1) Resuelve por factorización: a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ c) $x^2 - 6x = 0$
- 2) Resuelve con la fórmula general: a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
- 3) Resuelve completando el cuadrado: $x^2 - 10x + 21 = 0$.
- 4) Calcula el discriminante e indica cuántas raíces reales tiene cada ecuación: a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 5 = 0$ c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
- 5) Usa las relaciones entre raíces y coeficientes: a) Escribe una ecuación cuadrática con raíces 3 y -4. b) Si la suma de las raíces es -6 y su producto es 9, escribe la ecuación. c) Si el producto de las raíces es 10 y su suma es -7, encuentra las raíces.
- 6) Un rectángulo tiene área de 48 cm^2 y su largo mide 2 cm más que su ancho. Encuentra las dimensiones.
- 7) El cuadrado de un número menos el triple del número es igual a 10. Encuentra el número.
- 8) Resuelve $3x^2 = 2x + 5$.
- 9) Resuelve por el método que prefieras $x^2 - x - 6 = 0$, y luego verifica tus raíces con el discriminante y con las relaciones de suma y producto.

10) La suma de un número con su cuadrado es igual a 30. Encuentra el número.

SOLUCIONES

1a) $x^2 - 3x + 2 = 0$. Dos números que multiplicados den 2 y sumados den -3: -1 y -2. Factorizo: $(x - 1)(x - 2) = 0$. Entonces $x = 1$ o $x = 2$. Comprobación: $1 - 3 + 2 = 0$; $4 - 6 + 2 = 0$. Raíces: $x = 1$ y $x = 2$.

1b) $x^2 + 8x + 15 = 0$. Dos números que multiplicados den 15 y sumados den 8: 3 y 5. Factorizo: $(x + 3)(x + 5) = 0$. Entonces $x = -3$ o $x = -5$. Comprobación: $9 - 24 + 15 = 0$; $25 - 40 + 15 = 0$. Raíces: $x = -3$ y $x = -5$.

1c) $x^2 - 6x = 0$. Saco factor común x : $x(x - 6) = 0$. Entonces $x = 0$ o $x = 6$. Comprobación: $0 - 0 = 0$; $36 - 36 = 0$. Raíces: $x = 0$ y $x = 6$.

2a) $x^2 - 4x - 5 = 0$. $a = 1$, $b = -4$, $c = -5$. $D = 16 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$. $x = (4 \pm \sqrt{36}) / 2 = (4 \pm 6) / 2$. Raíz 1: $(4 + 6)/2 = 5$. Raíz 2: $(4 - 6)/2 = -1$. Comprobación: $25 - 20 - 5 = 0$; $1 + 4 - 5 = 0$. Raíces: $x = 5$ y $x = -1$.

2b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$. $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$. $D = 9 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$. $x = (3 \pm \sqrt{1}) / 4 = (3 \pm 1) / 4$. Raíz 1: $4/4 = 1$. Raíz 2: $2/4 = 1/2$. Comprobación: $2(1) - 3(1) + 1 = 0$; $2(1/4) - 3(1/2) + 1 = 1/2 - 3/2 + 1 = 0$. Raíces: $x = 1$ y $x = 1/2$.

3) $x^2 - 10x + 21 = 0$. Paso el 21: $x^2 - 10x = -21$. Sumo $(b/2)^2 = (-5)^2 = 25$ en ambos lados: $x^2 - 10x + 25 = -21 + 25 = 4$. Escribo el cuadrado: $(x - 5)^2 = 4$. Saco raíz: $x - 5 = \pm 2$. Entonces $x = 5 + 2 = 7$ o $x = 5 - 2 = 3$. Comprobación: $49 - 70 + 21 = 0$; $9 - 30 + 21 = 0$. Raíces: $x = 7$ y $x = 3$.

4a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$. $D = 4 - 4(3)(-1) = 4 + 12 = 16$. Como $D > 0$, tiene dos raíces reales distintas (son $x = 1/3$ y $x = -1$, como se vio en la sección 6.5).

4b) $x^2 - 2x + 5 = 0$. $D = 4 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$. Como $D < 0$, no tiene raíces reales.

4c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$. $D = 144 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$. Como $D = 0$, tiene una raíz real doble. La raíz es $x = -b/(2a) = 12/8 = 3/2$. Comprobación: $4(9/4) - 12(3/2) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$. Raíz: $x = 3/2$ (doble).

5a) Raíces 3 y -4. Suma: $3 + (-4) = -1$. Producto: $3 \times (-4) = -12$. Con $a = 1$: $b = 1$, $c = -12$. Ecuación: $x^2 + x - 12 = 0$. Comprobación: $9 + 3 - 12 = 0$; $16 - 4 - 12 = 0$. Correcto.

5b) Suma -6, producto 9. Con $a = 1$: $-b = -6$, entonces $b = 6$; $c = 9$. Ecuación: $x^2 + 6x + 9 = 0$. Es un cuadrado perfecto: $(x + 3)^2 = 0$, raíz $x = -3$ (doble). Comprobación: $9 - 18 + 9 = 0$. Correcto.

5c) Producto 10, suma -7. Con $a = 1$: $b = 7$, $c = 10$. Ecuación: $x^2 + 7x + 10 = 0$. Factorizo: $(x + 2)(x + 5) = 0$. Raíces: $x = -2$ y $x = -5$. Comprobación de la suma: $-2 + (-5) = -7$. Comprobación del producto: $(-2) \times (-5) = 10$. Correcto.

6) Sea x el ancho, el largo es $x + 2$. El área es $x(x + 2) = 48$. Desarrollo: $x^2 + 2x - 48 = 0$. $a = 1$, $b = 2$, $c = -48$. $D = 4 - 4(1)(-48) = 4 + 192 = 196$. $x = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2}$. Raíz 1: $(-2 + 14)/2 = 6$. Raíz 2: $(-2 - 14)/2 = -8$. El ancho no puede ser negativo, así que $x = 6$ cm y el largo es 8 cm. Comprobación: $6 \times 8 = 48$. Las dimensiones son 6 cm de ancho y 8 cm de largo.

7) Sea x el número: $x^2 - 3x = 10$, o sea $x^2 - 3x - 10 = 0$. Factorizo: dos números que multiplicados den -10 y sumados den -3: -5 y 2. $(x - 5)(x + 2) = 0$. Entonces $x = 5$ o $x = -2$. Comprobación: $25 - 15 = 10$; $4 - (-6) = 4 + 6 = 10$. El número puede ser 5 o -2.

8) $3x^2 = 2x + 5$. Igualo a cero: $3x^2 - 2x - 5 = 0$. $a = 3$, $b = -2$, $c = -5$. $D = 4 - 4(3)(-5) = 4 + 60 = 64$. $x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$. Raíz 1: $10/6 = 5/3$. Raíz 2: $-6/6 = -1$. Comprobación con $x = 5/3$: $3(25/9) = 75/9 = 25/3$; $2(5/3) + 5 = 10/3 + 15/3 = 25/3$. Correcto. Comprobación con $x = -1$: $3(1) = 3$; $2(-1) + 5 = 3$. Correcto. Raíces: $x = 5/3$ y $x = -1$.

9) $x^2 - x - 6 = 0$. Por factorización: dos números que multiplicados den -6 y sumados den -1: -3 y 2. $(x - 3)(x + 2) = 0$. Raíces: $x = 3$ y $x = -2$. Verifico con el discriminante: $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$. $D = 1 - 4(1)(-6) = 25 > 0$, dos raíces reales distintas. Correcto. Verifico con las relaciones: suma: $3 + (-2) = 1$, y $-b/a = 1$. Correcto. Producto: $3 \times (-2) = -6$, y $c/a = -6$. Correcto. Todo cuadra: raíces $x = 3$ y $x = -2$.

10) Sea x el número: $x + x^2 = 30$, o sea $x^2 + x - 30 = 0$. Factorizo: dos números que multiplicados den -30 y sumados den 1: 6 y -5. $(x + 6)(x - 5) = 0$. Entonces $x = -6$ o $x = 5$. Comprobación: $(-6) + 36 = 30$; $5 + 25 = 30$. El número puede ser 5 o -6.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 6

- Una ecuación cuadrática ($ax^2 + bx + c = 0$, con a distinto de cero) puede tener hasta dos raíces.
- La factorización es el método más rápido cuando funciona: iguala a cero y aplica la propiedad del producto cero.
- La fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ resuelve todas las cuadráticas; identifica a , b y c con sus signos antes de sustituir.
- Completar el cuadrado convierte $x^2 + bx$ en un binomio al cuadrado; es de donde nace la fórmula general.

- El discriminante $D = b^2 - 4ac$ es tu diagnóstico previo: $D > 0$ da dos raíces reales, $D = 0$ una raíz doble, y $D < 0$ ninguna raíz real.
- Las raíces y los coeficientes están ligadas: $x_1 + x_2 = -b/a$ y $x_1 \times x_2 = c/a$. Úsalas para comprobar o para construir una ecuación a partir de sus raíces.

CAPÍTULO 7: SISTEMAS DE ECUACIONES

En el capítulo anterior trabajaste con una sola ecuación y una sola incógnita. Ahora sube la apuesta: vas a resolver varias ecuaciones al mismo tiempo, con varias incógnitas. Esto aparece en todos lados: repartir costos, mezclar ingredientes, calcular edades, planear presupuestos. Dominar los sistemas de ecuaciones es una de las herramientas más útiles de todo el álgebra, así que vamos paso a paso hasta que los resuelvas con los ojos cerrados.

7.1 Qué es un sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones que se deben cumplir al mismo tiempo, con las mismas incógnitas. Resolver el sistema significa encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones a la vez.

La forma típica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es:

$$\{ 2x + 3y = 12, x - y = 1 \}$$

Aquí las incógnitas son x e y . La solución del sistema es el par de valores (x, y) que al sustituirlos hacen verdaderas las dos ecuaciones.

Un sistema puede tener una sola solución, infinitas soluciones o ninguna solución. En este capítulo aprenderás a resolverlos con tres métodos: sustitución, eliminación y gráfico.

Antes de resolver, recuerda la regla de oro: cuando sustituyas la solución en las ecuaciones originales, ambas deben cumplirse. Si una no se cumple, algo salió mal y hay que revisar el procedimiento.

Ejemplo 1: Resuelve el sistema $\{ x + y = 10, x - y = 4 \}$ por inspección.

Solución: Si sumamos las dos ecuaciones, las y se cancelan: $(x + y) + (x - y) = 10 + 4$, lo que da $2x = 14$, entonces $x = 7$. Sustituyendo $x = 7$ en la primera ecuación: $7 + y = 10$, entonces $y = 3$. Comprobación: $7 + 3 = 10$ (correcto) y $7 - 3 = 4$ (correcto). Solución: $x = 7, y = 3$.

Ejemplo 2: Resuelve el sistema $\{ 2x + y = 8, x - y = 1 \}$.

Solución: Despejamos y de la segunda ecuación: $y = x - 1$. Sustituimos en la primera: $2x + (x - 1) = 8$, entonces $3x - 1 = 8$, $3x = 9$, $x = 3$. Luego $y = 3 - 1 = 2$. Comprobación: $2(3) + 2 = 8$ (correcto) y $3 - 2 = 1$ (correcto). Solución: $x = 3, y = 2$.

Ejemplo 3: La suma de dos números es 40 y su diferencia es 8. Encuentra los números.

Solución: Llamamos x al número mayor e y al número menor. El sistema es $\{ x + y = 40, x - y = 8 \}$. Sumando ambas ecuaciones: $2x = 48$, entonces $x = 24$. Sustituyendo: $24 + y = 40$, entonces $y = 16$. Comprobación: $24 + 16 = 40$ (correcto) y $24 - 16 = 8$ (correcto). Los números son 24 y 16.

Un detalle importante de notación: la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siempre se escribe como un par ordenado (x, y) . El orden importa: $(3, 7)$ no es lo mismo que $(7, 3)$. Cuando el sistema tiene tres incógnitas, la solución es una terna (x, y, z) .

Ejemplo 4: Resuelve el sistema $\{ x - 2y = -5, 3x + y = 8 \}$.

Solución: Despejamos y de la segunda ecuación: $y = 8 - 3x$. Sustituimos en la primera: $x - 2(8 - 3x) = -5$, entonces $x - 16 + 6x = -5$, $7x = 11$, $x = 11/7$. Luego $y = 8 - 3(11/7) = 56/7 - 33/7 = 23/7$. Comprobación: $11/7 - 2(23/7) = 11/7 - 46/7 = -35/7 = -5$ (correcto) y $3(11/7) + 23/7 = 56/7 = 8$ (correcto). Solución: $x = 11/7, y = 23/7$.

7.2 Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una incógnita de una ecuación y sustituirla en la otra. Así se reduce el sistema a una sola ecuación con una incógnita.

Pasos:

1. Despeja una incógnita de una de las ecuaciones (elige la que sea más fácil de despejar).
2. Sustituye esa expresión en la otra ecuación.
3. Resuelve la ecuación resultante y encuentra el valor de una incógnita.
4. Sustituye ese valor en el despeje del paso 1 para encontrar la otra incógnita.
5. Comprueba en las ecuaciones originales.

Ejemplo 1: Resuelve $\{ y = 2x + 1, 3x + y = 16 \}$.

Solución: La primera ecuación ya tiene y despejada. Sustituimos en la segunda: $3x + (2x + 1) = 16$, entonces $5x + 1 = 16$, $5x = 15$, $x = 3$. Ahora $y = 2(3) + 1 = 7$. Comprobación: $3(3) + 7 = 9 + 7 = 16$ (correcto). Solución: $x = 3, y = 7$.

Ejemplo 2: Resuelve $\{ 2x - y = 5, x + 3y = 6 \}$.

Solución: Despejamos y de la primera ecuación: $y = 2x - 5$. Sustituimos en la segunda: $x + 3(2x - 5) = 6$, entonces $x + 6x - 15 = 6$, $7x = 21$, $x = 3$. Luego $y = 2(3) - 5 = 1$. Comprobación: $2(3) - 1 = 5$ (correcto) y $3 + 3(1) = 6$ (correcto). Solución: $x = 3, y = 1$.

Ejemplo 3: Resuelve $\{ x + 2y = 11, 3x - y = 3 \}$.

Solución: Despejamos y de la segunda ecuación: $y = 3x - 3$. Sustituimos en la primera: $x + 2(3x - 3) = 11$, entonces $x + 6x - 6 = 11$, $7x = 17$, $x = 17/7$. Luego $y = 3(17/7) - 3 = 51/7 - 21/7 = 30/7$. Comprobación: $x + 2y = 17/7 + 60/7 = 77/7 = 11$ (correcto) y $3(17/7) - 30/7 = 51/7 - 30/7 = 21/7 = 3$ (correcto). Solución: $x = 17/7$, $y = 30/7$.

Ejemplo 4: Un bolígrafo y un cuaderno cuestan 65 pesos en total. Si el cuaderno cuesta 15 pesos más que el bolígrafo, ¿cuánto cuesta cada uno?

Solución: Sea x el precio del bolígrafo e y el del cuaderno. Sistema: $\{ x + y = 65, y = x + 15 \}$. Sustituimos: $x + (x + 15) = 65$, entonces $2x + 15 = 65$, $2x = 50$, $x = 25$. Luego $y = 25 + 15 = 40$. Comprobación: $25 + 40 = 65$ (correcto) y $40 = 25 + 15$ (correcto). El bolígrafo cuesta 25 pesos y el cuaderno 40 pesos.

Consejo del profe: la sustitución brilla cuando una de las ecuaciones ya tiene una incógnita despejada o cuando algún coeficiente es 1 o -1, porque el despeje queda limpio. Si todos los coeficientes son números "feos", probablemente la eliminación sea más rápida.

Ejemplo 5: Resuelve $\{ x/2 + y = 5, x - y = 1 \}$.

Solución: De la segunda ecuación despejamos x : $x = y + 1$. Sustituimos en la primera: $(y + 1)/2 + y = 5$. Multiplicamos todo por 2 para quitar el denominador: $y + 1 + 2y = 10$, entonces $3y = 9$, $y = 3$. Luego $x = 3 + 1 = 4$. Comprobación: $4/2 + 3 = 2 + 3 = 5$ (correcto) y $4 - 3 = 1$ (correcto). Solución: $x = 4$, $y = 3$.

Ejemplo 6: La edad de un padre es el triple de la de su hijo y la suma de ambas edades es 56 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Solución: Sea p la edad del padre y h la del hijo. Sistema: $\{ p = 3h, p + h = 56 \}$. Sustituimos la primera en la segunda: $3h + h = 56$, $4h = 56$, $h = 14$. Luego $p = 3(14) = 42$. Comprobación: $42 = 3(14)$ (correcto) y $42 + 14 = 56$ (correcto). El padre tiene 42 años y el hijo 14.

7.3 Método de eliminación

El método de eliminación (también llamado de suma y resta o de reducción) consiste en sumar o restar las ecuaciones para eliminar una de las incógnitas.

Pasos:

1. Multiplica una o ambas ecuaciones por números adecuados para que los coeficientes de una incógnita sean iguales u opuestos.

2. Suma o resta las ecuaciones para eliminar esa incógnita.
3. Resuelve la ecuación resultante.
4. Sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones originales para hallar la otra incógnita.
5. Comprueba.

Ejemplo 1: Resuelve $\{ 3x + 2y = 16, 3x - 2y = 8 \}$.

Solución: Los coeficientes de y ya son opuestos (2 y -2). Sumamos las ecuaciones: $(3x + 2y) + (3x - 2y) = 16 + 8$, entonces $6x = 24$, $x = 4$. Sustituimos en la primera: $3(4) + 2y = 16$, $12 + 2y = 16$, $2y = 4$, $y = 2$. Comprobación: $3(4) + 2(2) = 12 + 4 = 16$ (correcto) y $3(4) - 2(2) = 12 - 4 = 8$ (correcto). Solución: $x = 4$, $y = 2$.

Ejemplo 2: Resuelve $\{ 2x + 3y = 13, 5x - 3y = 8 \}$.

Solución: Los coeficientes de y son opuestos (3 y -3). Sumamos: $(2x + 3y) + (5x - 3y) = 13 + 8$, entonces $7x = 21$, $x = 3$. Sustituimos en la primera: $2(3) + 3y = 13$, $6 + 3y = 13$, $3y = 7$, $y = 7/3$. Comprobación: $5(3) - 3(7/3) = 15 - 7 = 8$ (correcto). Solución: $x = 3$, $y = 7/3$.

Ejemplo 3: Resuelve $\{ 4x + 5y = 23, 3x + 2y = 12 \}$.

Solución: Ningún coeficiente coincide. Para eliminar y , multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por -5: $(8x + 10y = 46) + (-15x - 10y = -60)$. Sumamos: $-7x = -14$, entonces $x = 2$. Sustituimos en la segunda ecuación original: $3(2) + 2y = 12$, $6 + 2y = 12$, $2y = 6$, $y = 3$. Comprobación: $4(2) + 5(3) = 8 + 15 = 23$ (correcto) y $3(2) + 2(3) = 6 + 6 = 12$ (correcto). Solución: $x = 2$, $y = 3$.

Ejemplo 4: Resuelve $\{ 5x + 2y = 19, 3x - 4y = 7 \}$.

Solución: Para eliminar y , multiplicamos la primera ecuación por 2: $10x + 4y = 38$. Sumamos con la segunda: $(10x + 4y) + (3x - 4y) = 38 + 7$, entonces $13x = 45$, $x = 45/13$. Sustituimos en la primera original: $5(45/13) + 2y = 19$, $225/13 + 2y = 247/13$, $2y = 22/13$, $y = 11/13$. Comprobación: $3(45/13) - 4(11/13) = 135/13 - 44/13 = 91/13 = 7$ (correcto). Solución: $x = 45/13$, $y = 11/13$.

Truco para elegir el multiplicador: para eliminar una incógnita, busca el mínimo común múltiplo de sus dos coeficientes. En el Ejemplo 3 los coeficientes de y eran 5 y 2, cuyo mínimo común múltiplo es 10, por eso multiplicamos por 2 y por 5. Hacerlo así mantiene los números lo más chicos posible y reduce errores de cálculo.

Ejemplo 5: Resuelve $\{ 6x + 5y = 27, 2x - 3y = -9 \}$.

Solución: Para eliminar x , multiplicamos la segunda ecuación por 3: $6x - 9y = -27$. Restamos esta de la primera: $(6x + 5y) - (6x - 9y) = 27 - (-27)$, entonces $14y = 54$, $y = 54/14 = 27/7$. Sustituimos en la segunda original: $2x - 3(27/7) = -9$, $2x - 81/7 = -63/7$, $2x = 18/7$, $x = 9/7$. Comprobación: $6(9/7) + 5(27/7) = 54/7 + 135/7 = 189/7 = 27$ (correcto). Solución: $x = 9/7$, $y = 27/7$.

Ejemplo 6: Resuelve $\{ 7x + 4y = 26, 5x - 4y = 10 \}$.

Solución: Los coeficientes de y ya son opuestos (4 y -4). Sumamos: $(7x + 4y) + (5x - 4y) = 26 + 10$, entonces $12x = 36$, $x = 3$. Sustituimos en la primera: $7(3) + 4y = 26$, $21 + 4y = 26$, $4y = 5$, $y = 5/4$. Comprobación: $5(3) - 4(5/4) = 15 - 5 = 10$ (correcto). Solución: $x = 3$, $y = 5/4$.

7.4 Método gráfico

Cada ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano. Resolver el sistema gráficamente significa dibujar ambas rectas y encontrar su punto de intersección: ese punto (x, y) es la solución.

Para graficar una recta basta con encontrar dos puntos, normalmente las intersecciones con los ejes:

- Intersección con el eje x : haz $y = 0$ y despeja x .
- Intersección con el eje y : haz $x = 0$ y despeja y .

Ejemplo 1: Resuelve gráficamente $\{ x + y = 5, x - y = 1 \}$.

Solución: Para $x + y = 5$: si $x = 0$, $y = 5$ (punto $(0, 5)$); si $y = 0$, $x = 5$ (punto $(5, 0)$). Para $x - y = 1$: si $x = 0$, $y = -1$ (punto $(0, -1)$); si $y = 0$, $x = 1$ (punto $(1, 0)$). Al trazar ambas rectas se cortan en el punto $(3, 2)$. Comprobación algebraica: $3 + 2 = 5$ (correcto) y $3 - 2 = 1$ (correcto). Solución: $x = 3$, $y = 2$.

Ejemplo 2: Resuelve gráficamente $\{ 2x + y = 7, x + y = 4 \}$.

Solución: Para $2x + y = 7$: puntos $(0, 7)$ y $(7/2, 0)$, es decir $(3.5, 0)$. Para $x + y = 4$: puntos $(0, 4)$ y $(4, 0)$. Las rectas se cortan en $(3, 1)$. Comprobación: $2(3) + 1 = 7$ (correcto) y $3 + 1 = 4$ (correcto). Solución: $x = 3$, $y = 1$.

Ejemplo 3: ¿Qué significa que las rectas no se corten? Resuelve $\{ x + y = 2, x + y = 6 \}$.

Solución: La primera recta pasa por $(0, 2)$ y $(2, 0)$; la segunda por $(0, 6)$ y $(6, 0)$. Ambas tienen la misma pendiente (-1) , así que son paralelas: nunca se cortan. El sistema no tiene solución. Esto se confirma algebraicamente: restando las ecuaciones queda $0 = -4$, una contradicción.

Nota del profe: el método gráfico es excelente para visualizar, pero si la solución no es un par de números enteros es difícil leerla con exactitud en la gráfica. Por eso, para respuestas exactas usa sustitución o eliminación, y deja el gráfico para entender lo que está pasando.

Ejemplo 4: Resuelve gráficamente $\{ y = 2x - 3, y = -x + 3 \}$.

Solución: Aquí las ecuaciones ya vienen en la forma $y = mx + b$, lista para graficar. La primera tiene pendiente 2 y ordenada al origen -3: pasa por (0, -3) y (2, 1). La segunda tiene pendiente -1 y ordenada 3: pasa por (0, 3) y (3, 0). Al trazarlas se cortan en el punto (2, 1). Comprobación algebraica: $2(2) - 3 = 1$ (correcto) y $-(2) + 3 = 1$ (correcto). Solución: $x = 2, y = 1$.

Observa algo útil: la pendiente te dice cómo se inclina cada recta. Si las pendientes son distintas, las rectas se cortan en exactamente un punto y el sistema tiene solución única. Si las pendientes son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes, y eso nos lleva a los casos especiales de la sección 7.6.

Ejemplo 5: Resuelve gráficamente $\{ 3x + y = 11, x - y = 1 \}$.

Solución: Para $3x + y = 11$: si $x = 0$, $y = 11$ (punto (0, 11)); si $y = 0$, $x = 11/3$ (punto (3.67, 0)). Para $x - y = 1$: puntos (0, -1) y (1, 0). Las rectas se cortan en (3, 2). Comprobación: $3(3) + 2 = 11$ (correcto) y $3 - 2 = 1$ (correcto). Solución: $x = 3, y = 2$.

7.5 Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene la forma:

$$\{ x + y + z = 6, 2x - y + z = 3, x + 2y - z = 2 \}$$

La estrategia es reducirlo paso a paso: combina dos pares de ecuaciones para eliminar la misma incógnita y obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resuélvelo y sustituye hacia atrás.

Pasos:

1. Elige una incógnita para eliminar (la más cómoda).
2. Combina la ecuación 1 con la 2 para eliminarla, y luego la ecuación 1 con la 3.
3. Resuelve el sistema 2x2 resultante.
4. Sustituye los valores en una de las ecuaciones originales para hallar la tercera incógnita.
5. Comprueba en las tres ecuaciones.

Ejemplo 1: Resuelve $\{ x + y + z = 6, 2x - y + z = 3, x + 2y - z = 2 \}$.

Solución: Eliminamos z . Sumamos la ecuación 1 con la 2: $(x + y + z) + (2x - y + z) = 6 + 3$, entonces $3x + 2z = 9$. Sumamos la ecuación 2 con la 3: $(2x - y + z) + (x + 2y - z) = 3 + 2$, entonces $3x + y = 5$. Ahora resolvemos el sistema $\{ 3x + 2z = 9, 3x + y = 5 \}$. De la segunda: $y = 5 - 3x$. Sustituimos en la primera... mejor despejamos y y z : $z = (9 - 3x)/2$, $y = 5 - 3x$. Sustituimos en la ecuación 1 original: $x + (5 - 3x) + (9 - 3x)/2 = 6$. Multiplicamos por 2: $2x + 10 - 6x + 9 - 3x = 12$, entonces $-7x + 19 = 12$, $-7x = -7$, $x = 1$. Luego $y = 5 - 3(1) = 2$, $z = (9 - 3)/2 = 3$. Comprobación: $1 + 2 + 3 = 6$ (correcto), $2(1) - 2 + 3 = 3$ (correcto), $1 + 2(2) - 3 = 2$ (correcto). Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Ejemplo 2: Resuelve $\{ x + y + z = 9, x - y + z = 3, 2x + y + z = 11 \}$.

Solución: Eliminamos y sumando la ecuación 1 con la 2: $(x + y + z) + (x - y + z) = 9 + 3$, entonces $2x + 2z = 12$, es decir $x + z = 6$. Restamos la ecuación 1 de la 3: $(2x + y + z) - (x + y + z) = 11 - 9$, entonces $x = 2$. Con $x = 2$ en $x + z = 6$: $z = 4$. Con $x = 2$, $z = 4$ en la ecuación 1: $2 + y + 4 = 9$, entonces $y = 3$. Comprobación: $2 - 3 + 4 = 3$ (correcto), $2(2) + 3 + 4 = 11$ (correcto). Solución: $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

Ejemplo 3: Tres cajas con juguetes pesan en total 60 kg. La segunda caja pesa el doble que la primera y la tercera pesa el triple que la primera. ¿Cuánto pesa cada caja?

Solución: Sea x el peso de la primera, y el de la segunda, z el de la tercera. Sistema: $\{ x + y + z = 60, y = 2x, z = 3x \}$. Sustituimos: $x + 2x + 3x = 60$, entonces $6x = 60$, $x = 10$. Luego $y = 20$, $z = 30$. Comprobación: $10 + 20 + 30 = 60$ (correcto). La primera caja pesa 10 kg, la segunda 20 kg y la tercera 30 kg.

Consejo del profe: en los sistemas 3×3 el error más común es equivocarse de signo al sumar o restar ecuaciones. Escribe cada combinación en una línea separada y revisa los signos antes de seguir. Y siempre, siempre comprueba al final en las tres ecuaciones originales, porque un error en el primer paso contamina todo lo demás.

Ejemplo 4: Resuelve $\{ 2x + y - z = 5, x - 2y + z = -2, 3x + y + z = 10 \}$.

Solución: Eliminamos z . Sumamos la ecuación 1 con la 2: $(2x + y - z) + (x - 2y + z) = 5 + (-2)$, entonces $3x - y = 3$. Sumamos la ecuación 1 con la 3: $(2x + y - z) + (3x + y + z) = 5 + 10$, entonces $5x + 2y = 15$. Resolvemos el sistema $\{ 3x - y = 3, 5x + 2y = 15 \}$. De la primera: $y = 3x - 3$. Sustituimos: $5x + 2(3x - 3) = 15$, $5x + 6x - 6 = 15$, $11x = 21$, $x = 21/11$. Luego $y = 3(21/11) - 3 = 63/11 - 33/11 = 30/11$. Despejamos z de la ecuación 1: $z = 2x + y - 5 = 42/11 + 30/11 - 55/11 = 17/11$. Comprobación: $2(21/11) + 30/11 - 17/11 = 42/11 + 30/11 - 17/11 = 55/11 = 5$ (correcto); $21/11 - 2(30/11) + 17/11 = 21/11 - 60/11 + 17/11 = -22/11 = -2$ (correcto); $3(21/11) + 30/11 + 17/11 = 110/11 = 10$ (correcto). Solución: $x = 21/11$, $y = 30/11$, $z = 17/11$.

7.6 Sistemas incompatibles y dependientes

No todos los sistemas tienen una única solución. Hay tres casos:

1. Sistema compatible determinado: tiene exactamente una solución (las rectas se cortan en un punto).
2. Sistema incompatible: no tiene solución (las rectas son paralelas, nunca se cortan).
3. Sistema compatible indeterminado (dependiente): tiene infinitas soluciones (las dos ecuaciones representan la misma recta).

¿Cómo distinguirlos? Si al resolver llegas a una igualdad falsa (como $0 = 5$), el sistema es incompatible. Si llegas a una igualdad verdadera que no da información (como $0 = 0$), el sistema es dependiente.

Ejemplo 1: Determina el tipo de sistema $\{ x + y = 3, x + y = 5 \}$.

Solución: Restamos la primera ecuación de la segunda: $(x + y) - (x + y) = 5 - 3$, entonces $0 = 2$, una contradicción. El sistema es incompatible: no tiene solución. Gráficamente son dos rectas paralelas.

Ejemplo 2: Determina el tipo de sistema $\{ 2x + 4y = 10, x + 2y = 5 \}$.

Solución: Dividimos la primera ecuación entre 2: $x + 2y = 5$, que es exactamente la segunda ecuación. Las dos ecuaciones dicen lo mismo, así que el sistema es dependiente: tiene infinitas soluciones. Todas las soluciones cumplen $y = (5 - x)/2$, por ejemplo $(0, 5/2)$, $(1, 2)$, $(5, 0)$. Comprobación con $(1, 2)$: $2(1) + 4(2) = 10$ (correcto) y $1 + 2(2) = 5$ (correcto).

Ejemplo 3: Determina el tipo de sistema $\{ 3x - y = 7, 6x - 2y = 10 \}$.

Solución: Despejamos y de la primera: $y = 3x - 7$. Sustituimos en la segunda: $6x - 2(3x - 7) = 10$, entonces $6x - 6x + 14 = 10$, $14 = 10$, una contradicción. El sistema es incompatible: no tiene solución.

Ejemplo 4: Determina el tipo de sistema $\{ 4x - 2y = 6, 2x - y = 3 \}$.

Solución: Multiplicamos la segunda ecuación por 2: $4x - 2y = 6$, idéntica a la primera. Sistema dependiente con infinitas soluciones de la forma $y = 2x - 3$. Por ejemplo, con $x = 0$ queda $y = -3$: $4(0) - 2(-3) = 6$ (correcto) y $2(0) - (-3) = 3$ (correcto).

Resumen rápido para no confundirte:

- Llegas a una solución única como $x = 2, y = 1$: compatible determinado.
- Llegas a una contradicción como $0 = 5$: incompatible, sin solución.

- Llegas a una identidad como $0 = 0$: dependiente, infinitas soluciones.

Ejemplo 5: Determina el tipo de sistema $\{ x + 2y = 4, 2x + 4y = 9 \}$.

Solución: Dividimos la segunda ecuación entre 2: $x + 2y = 9/2$, es decir $x + 2y = 4.5$, que contradice a $x + 2y = 4$. Restando queda $0 = 1/2$, una contradicción. El sistema es incompatible: no tiene solución.

7.7 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 7

- 1) Resuelve por sustitución: a) $\{ x + y = 7, y = x - 1 \}$ b) $\{ 3x + y = 5, x - 2y = -4 \}$
- 2) Resuelve por eliminación: a) $\{ x + 3y = 9, x - 3y = 3 \}$ b) $\{ 2x + y = 7, 4x + 3y = 15 \}$ c) $\{ 5x - 2y = 4, 3x + 4y = 20 \}$
- 3) Resuelve por el método que prefieras y comprueba: a) $\{ x - y = 5, 2x + y = 7 \}$ b) $\{ 3x - 4y = 1, 2x + 3y = 12 \}$
- 4) Resuelve los sistemas de 3×3 : a) $\{ x + y + z = 3, x + y - z = 1, 2x - y + z = 4 \}$ b) $\{ x + 2y + z = 8, 2x + y + z = 7, x + y + 2z = 9 \}$
- 5) Determina si cada sistema es compatible determinado, incompatible o dependiente: a) $\{ 2x + y = 6, 4x + 2y = 12 \}$ b) $\{ x - 3y = 2, 2x - 6y = 7 \}$ c) $\{ 3x + 2y = 8, x - y = 1 \}$
- 6) La suma de dos números es 50 y uno es el triple del otro. Encuentra los números.
- 7) En una granja hay gallinas y conejos. En total hay 35 cabezas y 94 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?
- 8) Tres números suman 27. El segundo es el doble del primero y el tercero es 3 unidades más que el segundo. Encuentra los tres números.
- 9) En un cine, 2 boletos de adulto y 3 de niño cuestan 310 pesos en total. Un boleto de adulto cuesta 30 pesos más que uno de niño. ¿Cuánto cuesta cada boleto?
- 10) Resuelve el sistema $\{ x + y + z = 10, x + y - z = 4, x - y + z = 2 \}$.

SOLUCIONES

- 1) a) Sustituimos $y = x - 1$ en la primera: $x + (x - 1) = 7$, $2x = 8$, $x = 4$. Luego $y = 4 - 1 = 3$. Comprobación: $4 + 3 = 7$ (correcto). Solución: $x = 4$, $y = 3$. b) De la primera: $y = 5 - 3x$. Sustituimos: $x - 2(5 - 3x) = -4$, $x - 10 + 6x = -4$, $7x = 6$, $x = 6/7$. Luego $y = 5 - 18/7 = 17/7$. Comprobación: $6/7 - 2(17/7) = 6/7 - 34/7 = -28/7 = -4$ (correcto). Solución: $x = 6/7$, $y = 17/7$.

2) a) Sumamos: $2x = 12$, $x = 6$. Sustituimos: $6 + 3y = 9$, $3y = 3$, $y = 1$. Comprobación: $6 - 3(1) = 3$ (correcto). Solución: $x = 6$, $y = 1$. b) Multiplicamos la primera por -2 : $-4x - 2y = -14$. Sumamos con la segunda: $y = 1$. Sustituimos: $2x + 1 = 7$, $x = 3$. Comprobación: $4(3) + 3(1) = 15$ (correcto). Solución: $x = 3$, $y = 1$. c) Multiplicamos la primera por 2 : $10x - 4y = 8$. Sumamos con la segunda: $13x = 28$, $x = 28/13$. Sustituimos en la primera: $5(28/13) - 2y = 4$, $140/13 - 2y = 52/13$, $2y = 88/13$, $y = 44/13$. Comprobación: $3(28/13) + 4(44/13) = 84/13 + 176/13 = 260/13 = 20$ (correcto). Solución: $x = 28/13$, $y = 44/13$.

3) a) Sumamos las ecuaciones: $3x = 12$, $x = 4$. Sustituimos: $4 - y = 5$, $y = -1$. Comprobación: $2(4) + (-1) = 7$ (correcto). Solución: $x = 4$, $y = -1$. b) Multiplicamos la primera por 3 y la segunda por 4 : $9x - 12y = 3$ y $8x + 12y = 48$. Sumamos: $17x = 51$, $x = 3$. Sustituimos: $3(3) - 4y = 1$, $9 - 4y = 1$, $4y = 8$, $y = 2$. Comprobación: $2(3) + 3(2) = 12$ (correcto). Solución: $x = 3$, $y = 2$.

4) a) Sumamos la ecuación 1 con la 2: $2x + 2y = 4$, es decir $x + y = 2$. Restamos la ecuación 2 de la 1: $2z = 2$, $z = 1$. Con $z = 1$ en la ecuación 3: $2x - y + 1 = 4$, $2x - y = 3$. Resolvemos $\{x + y = 2, 2x - y = 3\}$: sumamos, $3x = 5$, $x = 5/3$; $y = 2 - 5/3 = 1/3$. Comprobación: $5/3 + 1/3 + 1 = 3$ (correcto), $5/3 + 1/3 - 1 = 1$ (correcto), $2(5/3) - 1/3 + 1 = 10/3 - 1/3 + 3/3 = 12/3 = 4$ (correcto). Solución: $x = 5/3$, $y = 1/3$, $z = 1$. b) Restamos la ecuación 2 de la 1: $(x + 2y + z) - (2x + y + z) = 8 - 7$, $-x + y = 1$, es decir $y = x + 1$. Restamos la ecuación 3 de la 1: $(x + 2y + z) - (x + y + 2z) = 8 - 9$, $y - z = -1$, $z = y + 1 = x + 2$. Sustituimos en la ecuación 2: $2x + (x + 1) + (x + 2) = 7$, $4x + 3 = 7$, $4x = 4$, $x = 1$. Luego $y = 2$, $z = 3$. Comprobación: $1 + 4 + 3 = 8$ (correcto), $2 + 2 + 3 = 7$ (correcto), $1 + 2 + 6 = 9$ (correcto). Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

5) a) La segunda ecuación es el doble de la primera: al dividir $4x + 2y = 12$ entre 2 queda $2x + y = 6$, idéntica a la primera. Sistema dependiente: infinitas soluciones. b) Multiplicamos la primera por 2 : $2x - 6y = 4$, que contradice a $2x - 6y = 7$. Sistema incompatible: sin solución. c) Despejamos x de la segunda: $x = y + 1$. Sustituimos: $3(y + 1) + 2y = 8$, $5y + 3 = 8$, $5y = 5$, $y = 1$, $x = 2$. Solución única: compatible determinado, $x = 2$, $y = 1$.

6) Sea x el número mayor e y el menor: $\{x + y = 50, x = 3y\}$. Sustituimos: $3y + y = 50$, $4y = 50$, $y = 25/2 = 12.5$. Luego $x = 75/2 = 37.5$. Comprobación: $37.5 + 12.5 = 50$ (correcto) y $37.5 = 3(12.5)$ (correcto). Los números son 37.5 y 12.5 .

7) Sea g el número de gallinas y c el de conejos. Cada animal tiene una cabeza: $g + c = 35$. Las gallinas tienen 2 patas y los conejos 4: $2g + 4c = 94$. De la primera: $g = 35 - c$. Sustituimos: $2(35 - c) + 4c = 94$, $70 - 2c + 4c = 94$, $2c = 24$, $c = 12$. Luego $g = 35 - 12 = 23$. Comprobación: $23 + 12 = 35$ (correcto) y $2(23) + 4(12) = 46 + 48 = 94$ (correcto). Hay 23 gallinas y 12 conejos.

8) Sean x, y, z los números: $\{x + y + z = 27, y = 2x, z = y + 3\}$. Como $z = 2x + 3$, sustituimos: $x + 2x + (2x + 3) = 27$, $5x + 3 = 27$, $5x = 24$, $x = 24/5$. Luego $y = 48/5$, $z = 48/5 + 15/5 = 63/5$. Comprobación: $24/5 + 48/5 + 63/5 = 135/5 = 27$ (correcto), $y = 2x$ (correcto), $z = y + 3$ (correcto). Los números son $24/5$, $48/5$ y $63/5$.

9) Sea a el precio del boleto de adulto y n el de niño: $\{2a + 3n = 310, a = n + 30\}$. Sustituimos: $2(n + 30) + 3n = 310$, $2n + 60 + 3n = 310$, $5n = 250$, $n = 50$. Luego $a = 50 + 30 = 80$. Comprobación: $2(80) + 3(50) = 160 + 150 = 310$ (correcto). El boleto de adulto cuesta 80 pesos y el de niño 50 pesos.

10) Restamos la ecuación 2 de la 1: $(x + y + z) - (x + y - z) = 10 - 4$, $2z = 6$, $z = 3$. Restamos la ecuación 3 de la 1: $(x + y + z) - (x - y + z) = 10 - 2$, $2y = 8$, $y = 4$. Sustituimos en la ecuación 1: $x + 4 + 3 = 10$, $x = 3$. Comprobación: $3 + 4 + 3 = 10$ (correcto), $3 - 4 + 3 = 2$ (correcto). Solución: $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 7

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que deben cumplirse al mismo tiempo; su solución es el conjunto de valores que satisface todas.
- Sustitución: despeja una incógnita y métela en la otra ecuación. Ideal cuando hay un coeficiente 1 o -1 o una incógnita ya despejada.
- Eliminación: multiplica para igualar coeficientes y suma o resta para borrar una incógnita. Usa el mínimo común múltiplo para mantener los números chicos.
- Método gráfico: cada ecuación es una recta y la solución es el punto donde se cortan. Útil para visualizar, pero poco preciso con soluciones no enteras.
- En sistemas 3×3 elimina una incógnita combinando pares de ecuaciones, resuelve el sistema 2×2 que queda y sustituye hacia atrás.
- Tres casos posibles: solución única (compatible determinado), ninguna solución (incompatible, llegas a algo como $0 = 5$) e infinitas soluciones (dependiente, llegas a algo como $0 = 0$).
- Regla de oro que no se negocia: comprueba siempre la solución en las ecuaciones originales.

CAPÍTULO 8: ECUACIONES E INECUACIONES

Hasta ahora casi todo lo que resolviste fueron igualdades: dos cosas que valen lo mismo. Pero en la vida real casi nunca te piden algo exacto: te piden "al menos tanto", "menos que esto", "entre estos dos valores". Para eso están las inecuaciones. La buena noticia: se resuelven casi igual que las ecuaciones, con una sola regla nueva que vas a dominar en este capítulo. Al final también verás cómo representar las soluciones en la recta numérica, que es el lenguaje visual de las desigualdades.

8.1 Definición de inecuación

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que solo se cumple para ciertos valores de la incógnita. En lugar del signo igual usamos los símbolos de desigualdad:

- $<$: menor que
- $>$: mayor que
- $\leq$: menor o igual que
- $\geq$: mayor o igual que

Resolver una inecuación significa encontrar el conjunto de valores de la incógnita que la hacen verdadera. A ese conjunto se le llama conjunto solución y normalmente es un intervalo, es decir, infinitos valores.

Diferencia clave con las ecuaciones: una ecuación como $x + 3 = 7$ tiene una sola solución ($x = 4$), pero una inecuación como $x + 3 > 7$ se cumple para todos los valores $x > 4$, que son infinitos.

Ejemplo 1: Determina si $x = 5$ es solución de la inecuación $2x - 1 > 6$.

Solución: Sustituimos $x = 5$: $2(5) - 1 = 9$, y $9 > 6$ es verdadero. Entonces $x = 5$ sí es solución de la inecuación.

Ejemplo 2: Determina si $x = 2$ es solución de la inecuación $3x + 4 \leq 9$.

Solución: Sustituimos $x = 2$: $3(2) + 4 = 10$, y $10 \leq 9$ es falso. Entonces $x = 2$ no es solución.

Ejemplo 3: Escribe en lenguaje común la inecuación $x \geq 18$.

Solución: Significa que x puede ser 18 o cualquier número mayor que 18. En palabras: " x es mayor o igual que 18". Si x fuera la edad de una persona, diríamos que tiene al menos 18 años.

Las desigualdades cumplen propiedades parecidas a las de las igualdades, con una diferencia clave que ya verás en la siguiente sección:

- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para cualquier número c (sumar o restar lo mismo no cambia el sentido).
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ (multiplicar por un positivo no cambia el sentido).
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ (multiplicar por un negativo invierte el sentido).
- Propiedad transitiva: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Ejemplo 4: Verifica con números que sumar la misma cantidad no cambia el sentido de la desigualdad.

Solución: Tomemos la desigualdad verdadera $3 < 7$ y sumemos 5 en ambos lados: $3 + 5 = 8$ y $7 + 5 = 12$, y $8 < 12$ sigue siendo verdadero. Si restamos 10: $3 - 10 = -7$ y $7 - 10 = -3$, y $-7 < -3$ también es verdadero. Sumar o restar no voltea la desigualdad.

Ejemplo 5: Traduce a inecuación y resuelve: "Un número disminuido en 5 es a lo más 12".

Solución: "A lo más 12" significa menor o igual que 12. La inecuación es $x - 5 \leq 12$. Sumamos 5: $x \leq 17$. El número puede ser 17 o cualquier valor menor. En intervalo: $(-\infty, 17]$.

8.2 Inecuaciones de primer grado

Las inecuaciones de primer grado se resuelven casi igual que las ecuaciones de primer grado: despejas la incógnita pasando términos de un lado a otro. Hay una sola regla nueva y es importantísima:

Regla de oro: cuando multiplicas o divides ambos lados de una inecuación por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte. Es decir, $<$ se vuelve $>$ y viceversa, y $\leq$ se vuelve $\geq$ y viceversa.

Esta regla existe porque al multiplicar por un negativo el orden de los números se voltea: $2 < 5$ es verdadero, pero $2(-3) = -6$ y $5(-3) = -15$, y $-6 > -15$.

El conjunto solución se puede expresar de tres formas: con desigualdad ($x > 2$), con notación de intervalo $(2, \infty)$ o en la recta numérica.

Ejemplo 1: Resuelve $3x + 5 > 11$.

Solución: Restamos 5 en ambos lados: $3x > 6$. Dividimos entre 3 (positivo, no cambia el sentido): $x > 2$. Conjunto solución: $(2, \text{inf})$. Comprobación con $x = 3$: $3(3) + 5 = 14 > 11$ (correcto). Con $x = 1$ (fuera del intervalo): $3(1) + 5 = 8$, que no es mayor que 11 (correcto, queda excluido).

Ejemplo 2: Resuelve $2x - 7 \leq 3x + 1$.

Solución: Restamos $3x$ en ambos lados: $-x - 7 \leq 1$. Sumamos 7: $-x \leq 8$. Multiplicamos por -1 y el sentido se invierte: $x \geq -8$. Conjunto solución: $[-8, \text{inf})$. Comprobación con $x = 0$: $2(0) - 7 = -7$ y $3(0) + 1 = 1$, $-7 \leq 1$ (correcto). Con $x = -10$ (fuera): $2(-10) - 7 = -27$ y $3(-10) + 1 = -29$, $-27 \leq -29$ es falso (correcto, queda excluido).

Ejemplo 3: Resuelve $x/2 - 4 < 3x + 1$.

Solución: Restamos $x/2$ en ambos lados: $-4 < 5x/2 + 1$. Restamos 1: $-5 < 5x/2$. Multiplicamos por $2/5$ (positivo): $-2 < x$, es decir $x > -2$. Conjunto solución: $(-2, \text{inf})$. Comprobación con $x = 0$: $-4 < 1$ (correcto). Con $x = -3$ (fuera): $(-3)/2 - 4 = -5.5$ y $3(-3) + 1 = -8$, $-5.5 < -8$ es falso (correcto, queda excluido).

Ejemplo 4: El triple de un número menos 8 es mayor que 25. ¿Qué valores puede tomar el número?

Solución: Traducimos: $3x - 8 > 25$. Sumamos 8: $3x > 33$. Dividimos entre 3: $x > 11$. El número puede ser cualquier valor mayor que 11.

Error común que debes evitar: olvidar invertir el sentido al multiplicar o dividir entre un negativo. Por ejemplo, en $-2x > 8$ la tentación es escribir $x > -4$, pero lo correcto es $x < -4$. Compruébalo: con $x = -5$ queda $-2(-5) = 10 > 8$ (correcto), mientras que con $x = 0$ queda $0 > 8$ (falso). El -5, que es menor que -4, sí cumple; por eso el sentido se invierte.

Ejemplo 5: Resuelve $-3x + 4 \geq 10$.

Solución: Restamos 4: $-3x \geq 6$. Dividimos entre -3 y el sentido se invierte: $x \leq -2$. Conjunto solución: $(-\text{inf}, -2]$. Comprobación con $x = -2$: $-3(-2) + 4 = 10 \geq 10$ (correcto). Comprobación con $x = 0$ (fuera): $4 \geq 10$ es falso (correcto, queda excluido).

Ejemplo 6: Resuelve la desigualdad doble $4 < 3x - 2 \leq 10$.

Solución: Una desigualdad doble equivale a dos inecuaciones a la vez: $4 < 3x - 2$ y $3x - 2 \leq 10$. Sumamos 2 en las tres partes: $6 < 3x \leq 12$. Dividimos entre 3: $2 < x \leq 4$. Conjunto solución: $(2, 4]$. Comprobación con $x = 3$: $4 < 3(3) - 2 = 7 \leq 10$ (correcto). Comprobación con $x = 2$ (fuera, por ser estricta a la izquierda): $4 < 4$ es falso (correcto, queda excluido).

Ejemplo 7: Resuelve $(3x - 2)/4 > (x + 1)/2$.

Solución: Multiplicamos ambos lados por 4 (positivo, no cambia el sentido): $3x - 2 > 2(x + 1)$, entonces $3x - 2 > 2x + 2$. Restamos $2x$: $x - 2 > 2$. Sumamos 2: $x > 4$. Conjunto solución: $(4, \infty)$. Comprobación con $x = 5$: $(15 - 2)/4 = 13/4 = 3.25 > (5 + 1)/2 = 3$ (correcto). Comprobación con $x = 4$ (fuera, por ser estricta): $(12 - 2)/4 = 2.5 > (4 + 1)/2 = 2.5$ es falso (correcto, queda excluido).

8.3 Inecuaciones cuadráticas

Una inecuación cuadrática tiene la forma $ax^2 + bx + c > 0$ (o con $<$, $\leq$, $\geq$). Para resolverla:

1. Iguala a cero y encuentra las raíces de la ecuación cuadrática (factorizando o con la fórmula general).
2. Las raíces dividen la recta numérica en intervalos.
3. Prueba un valor de cada intervalo en la inecuación original para ver cuáles la cumplen.
4. Si la desigualdad es estricta ($>$ o $<$), las raíces quedan fuera; si es $\leq$ o $\geq$, las raíces se incluyen.

Recuerda la forma de la parábola: si $a > 0$ abre hacia arriba (la expresión es positiva fuera de las raíces) y si $a < 0$ abre hacia abajo (positiva entre las raíces).

Ejemplo 1: Resuelve $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Solución: Igualamos a cero: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Factorizamos: $(x - 2)(x - 3) = 0$, raíces $x = 2$ y $x = 3$. Los intervalos son $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, \infty)$. Probamos: con $x = 0$: $0 - 0 + 6 = 6 > 0$ (cumple). Con $x = 2.5$: $6.25 - 12.5 + 6 = -0.25$, que no es mayor que 0 (no cumple). Con $x = 4$: $16 - 20 + 6 = 2 > 0$ (cumple). Como la desigualdad es estricta, excluimos las raíces. Solución: $x < 2$ o $x > 3$, es decir $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

Ejemplo 2: Resuelve $x^2 + 2x - 8 \leq 0$.

Solución: Factorizamos $x^2 + 2x - 8 = 0$: $(x + 4)(x - 2) = 0$, raíces $x = -4$ y $x = 2$. Probamos intervalos: con $x = -5$: $25 - 10 - 8 = 7$, que no es menor o igual que 0 (no cumple). Con $x = 0$: $-8 \leq 0$ (cumple). Con $x = 3$: $9 + 6 - 8 = 7$ (no cumple). La parábola abre hacia arriba, así que es negativa entre las raíces. Como la desigualdad incluye el igual, incluimos las raíces. Solución: $-4 \leq x \leq 2$, es decir $[-4, 2]$.

Ejemplo 3: Resuelve $x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

Solución: Factorizamos: $(x - 2)^2 = 0$, raíz doble $x = 2$. Un cuadrado nunca es negativo, así que $(x - 2)^2 \geq 0$ se cumple para todo número real. Solución: todos los reales, $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 4: Resuelve $x^2 + x + 1 < 0$.

Solución: Calculamos el discriminante: $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$, negativo, así que no hay raíces reales. Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba y siempre está por encima del eje x : la expresión siempre es positiva. Por lo tanto nunca es menor que 0. Solución: conjunto vacío, no hay solución.

El discriminante ($b^2 - 4ac$) te adelanta el panorama antes de resolver:

- Si es positivo, hay dos raíces reales distintas y la recta queda dividida en tres intervalos.
- Si es cero, hay una raíz doble y la expresión solo cambia de signo en ese punto (o nunca cambia, si es un cuadrado).
- Si es negativo, no hay raíces reales y la expresión mantiene siempre el mismo signo: el signo de a .

Ejemplo 5: Resuelve $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$.

Solución: Igualamos a cero y factorizamos: $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3) = 0$, raíces $x = 1/2$ y $x = 3$. Probamos intervalos: con $x = 0$: $3 \leq 0$ es falso; con $x = 1$: $2 - 7 + 3 = -2 \leq 0$ (cumple); con $x = 4$: $32 - 28 + 3 = 7 \leq 0$ es falso. La parábola abre hacia arriba, así que es negativa entre las raíces, y la desigualdad incluye el igual. Solución: $1/2 \leq x \leq 3$, es decir $[1/2, 3]$.

Ejemplo 6: Resuelve $x^2 + 5x + 6 < 0$.

Solución: Factorizamos: $(x + 2)(x + 3) = 0$, raíces $x = -2$ y $x = -3$. Probamos intervalos: con $x = 0$: $6 < 0$ es falso; con $x = -2.5$: $6.25 - 12.5 + 6 = -0.25 < 0$ (cumple); con $x = -4$: $16 - 20 + 6 = 2 < 0$ es falso. La parábola abre hacia arriba, así que es negativa entre las raíces, y la desigualdad es estricta. Solución: $-3 < x < -2$, es decir $(-3, -2)$.

8.4 Sistemas de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de inecuaciones que deben cumplirse al mismo tiempo. La solución es la intersección de los conjuntos solución de cada inecuación: solo los valores que cumplen todas a la vez.

Pasos:

1. Resuelve cada inecuación por separado.
2. Representa cada solución en la recta numérica.
3. La solución del sistema es la zona donde se traslapan todas.

4. Comprueba con un valor del traslape en todas las inecuaciones originales.

Ejemplo 1: Resuelve $\{ x - 2 > 0, 2x + 1 \leq 9 \}$.

Solución: Primera inecuación: $x > 2$, intervalo $(2, \text{inf})$. Segunda: $2x \leq 8$, $x \leq 4$, intervalo $(-\text{inf}, 4]$. La intersección de $(2, \text{inf})$ con $(-\text{inf}, 4]$ es $(2, 4]$. Comprobación con $x = 3$: $3 - 2 = 1 > 0$ (correcto) y $2(3) + 1 = 7 \leq 9$ (correcto). Solución: $2 < x \leq 4$.

Ejemplo 2: Resuelve $\{ 3x - 1 < 8, x + 4 \geq 2 \}$.

Solución: Primera: $3x < 9$, $x < 3$, intervalo $(-\text{inf}, 3)$. Segunda: $x \geq -2$, intervalo $[-2, \text{inf})$. Intersección: $[-2, 3)$. Comprobación con $x = 0$: $3(0) - 1 = -1 < 8$ (correcto) y $0 + 4 = 4 \geq 2$ (correcto). Comprobación con $x = -2$: $3(-2) - 1 = -7 < 8$ (correcto) y $-2 + 4 = 2 \geq 2$ (correcto, el extremo se incluye). Solución: $-2 \leq x < 3$.

Ejemplo 3: Resuelve $\{ 2x + 5 > 1, 4x - 3 < 13 \}$.

Solución: Primera: $2x > -4$, $x > -2$, intervalo $(-2, \text{inf})$. Segunda: $4x < 16$, $x < 4$, intervalo $(-\text{inf}, 4)$. Intersección: $(-2, 4)$. Comprobación con $x = 1$: $2(1) + 5 = 7 > 1$ (correcto) y $4(1) - 3 = 1 < 13$ (correcto). Solución: $-2 < x < 4$.

Ejemplo 4: Resuelve $\{ x + 1 > 5, x - 4 < -1 \}$.

Solución: Primera: $x > 4$, intervalo $(4, \text{inf})$. Segunda: $x < 3$, intervalo $(-\text{inf}, 3)$. La intersección de $(4, \text{inf})$ con $(-\text{inf}, 3)$ está vacía: ningún número es mayor que 4 y menor que 3 a la vez. El sistema no tiene solución.

Un caso especial que aparece mucho en aplicaciones: las desigualdades dobles, como $1 < 2x + 3 \leq 9$. En realidad son un sistema de dos inecuaciones disfrazado: $\{ 1 < 2x + 3, 2x + 3 \leq 9 \}$. Se resuelven igual: de la primera sale $x > -1$ y de la segunda $x \leq 3$, así que la solución es $-1 < x \leq 3$, es decir $(-1, 3]$.

Ejemplo 5: Resuelve $\{ 5x - 2 < 3x + 6, 2x + 7 \geq 11 \}$.

Solución: Primera: restamos $3x$, $2x - 2 < 6$; sumamos 2, $2x < 8$; $x < 4$, intervalo $(-\text{inf}, 4)$. Segunda: $2x \geq 4$, $x \geq 2$, intervalo $[2, \text{inf})$. Intersección: $[2, 4)$. Comprobación con $x = 3$: $5(3) - 2 = 13 < 3(3) + 6 = 15$ (correcto) y $2(3) + 7 = 13 \geq 11$ (correcto). Solución: $2 \leq x < 4$.

Ejemplo 6: Un estudiante necesita promedio mayor o igual que 8 en dos exámenes para exentar. Ya sacó 7 en el primero y la calificación máxima es 10. ¿Qué necesita en el segundo?

Solución: Sea x la calificación del segundo examen. El promedio es $(7 + x)/2$ y debe cumplir $\{ (7 + x)/2 \geq 8, x \leq 10 \}$. De la primera: $7 + x \geq 16, x \geq 9$. Intersección con $x \leq 10$: $[9, 10]$. Comprobación con $x = 9$: $(7 + 9)/2 = 8 \geq 8$ (correcto). Necesita entre 9 y 10 en el segundo examen.

8.5 Solución en la recta numérica

La recta numérica es la herramienta visual para representar el conjunto solución de una inecuación. Cada número real ocupa un punto de la recta: a la derecha están los mayores y a la izquierda los menores.

Reglas de representación:

- Si el extremo se incluye ($\leq$ o $\geq$), se dibuja un punto relleno (o un corchete $[]$).
- Si el extremo no se incluye ($<$ o $>$), se dibuja un punto hueco (o un paréntesis $()$).
- La solución se sombrea sobre la recta en la dirección indicada.
- Los símbolos $-\infty$ y ∞ siempre llevan paréntesis, porque el infinito no es un número que se pueda alcanzar.

Notación de intervalos más comunes:

- (a, b) : $a < x < b$, ninguno de los extremos se incluye.
- $[a, b]$: $a \leq x \leq b$, ambos extremos se incluyen.
- $[a, b)$: $a \leq x < b$, solo se incluye a .
- $(a, b]$: $a < x \leq b$, solo se incluye b .
- (a, ∞) : $x > a$.
- $[a, \infty)$: $x \geq a$.
- $(-\infty, b)$: $x < b$.
- $(-\infty, b]$: $x \leq b$.

Ejemplo 1: Representa en la recta numérica la solución de $x \geq 3$.

Solución: El conjunto solución es $[3, \infty)$. En la recta se marca un punto relleno en el 3 y se sombrea toda la zona a la derecha del 3, hasta el infinito.

Ejemplo 2: Representa en la recta numérica la solución de $-2 < x \leq 4$.

Solución: El conjunto solución es $(-2, 4]$. En la recta se marca un punto hueco en el -2 , un punto relleno en el 4 y se sombrea el segmento entre ambos.

Ejemplo 3: Escribe como desigualdad y representa el intervalo $(-\infty, 1)$.

Solución: El intervalo $(-\infty, 1)$ corresponde a $x < 1$. En la recta se marca un punto hueco en el 1 y se sombrea toda la zona a la izquierda del 1 . El paréntesis en $-\infty$ indica que la recta se extiende sin límite hacia la izquierda.

Ejemplo 4: Representa la solución del sistema $\{x > 0, x \leq 5\}$.

Solución: La primera inecuación da $(0, \infty)$ y la segunda $(-\infty, 5]$. Al dibujar ambas en la misma recta, la zona donde se traslapan es $(0, 5]$: punto hueco en 0 , punto relleno en 5 y sombreado entre ambos. Esa zona es la solución del sistema.

Cuando la solución está formada por dos pedazos separados se usa el símbolo de unión $\cup$. Por ejemplo, la solución de $x^2 - 9 > 0$ es $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$: se somborean dos zonas separadas de la recta, una a la izquierda del -3 y otra a la derecha del 3 , sin nada entre ellas.

Ejemplo 5: Describe la representación en la recta numérica de $(-\infty, 2) \cup [5, \infty)$.

Solución: Hay dos zonas sombreadas. En la primera, punto hueco en el 2 con sombreado hacia la izquierda sin límite (todos los números menores que 2). En la segunda, punto relleno en el 5 con sombreado hacia la derecha sin límite (el 5 y todos los mayores). Entre 2 y 5 no hay sombreado: esos valores no son solución.

Ejemplo 6: Resuelve $2x + 1 > 7$ y expresa la solución en las tres formas: desigualdad, intervalo y descripción de la recta numérica.

Solución: Restamos 1 : $2x > 6$. Dividimos entre 2 : $x > 3$. Desigualdad: $x > 3$. Intervalo: $(3, \infty)$. Recta numérica: punto hueco en el 3 y sombreado hacia la derecha sin límite. Comprobación con $x = 4$: $2(4) + 1 = 9 > 7$ (correcto).

8.6 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 8

- 1) Resuelve las inecuaciones de primer grado y escribe la solución en notación de intervalo: a) $5x - 3 \geq 2x + 9$ b) $4(x - 2) < 3x + 5$ c) $(2x + 1)/3 \leq x - 2$
- 2) Resuelve las inecuaciones cuadráticas: a) $x^2 - 9 > 0$ b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ c) $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$

- 3) Resuelve los sistemas de inecuaciones: a) $\{ 2x - 3 > 5, x + 1 \leq 6 \}$ b) $\{ 3x + 2 \geq 8, 5 - x > 1 \}$
- 4) Recta numérica e intervalos: a) Representa en la recta numérica $x \leq -1$ y escribe el intervalo. b) Escribe como desigualdad el intervalo $(0, 5]$ y describe su representación. c) Traduce a inecuación y resuelve: "El doble de un número más 5 es menor que 17".
- 5) Resuelve el sistema $\{ 2x + 1 \geq 7, 3x - 2 < 13 \}$ y representa la solución en la recta numérica.
- 6) Resuelve $x^2 - 2x - 15 < 0$ y comprueba con un valor dentro y uno fuera del intervalo solución.
- 7) Determina si el sistema $\{ x + 2 > 8, 2x - 1 < 5 \}$ tiene solución.
- 8) Escribe la inecuación y el intervalo que representan "todos los números mayores o iguales que -5 pero menores que 2". Representalo en la recta numérica.
- 9) Resuelve $3(x - 1) + 2 \geq 5x - 4$ y escribe la solución en notación de intervalo.
- 10) Resuelve el sistema $\{ 4x - 1 > 7, 2x + 3 \leq 15 \}$ y comprueba con un valor de la solución.
- 11) Resuelve $-2x^2 + 8 > 0$ y comprueba con un valor dentro y uno fuera del intervalo solución.
- 12) Resuelve el sistema $\{ x/3 + 1 \geq 2, 2x - 5 < 9 \}$.

SOLUCIONES

- 1) a) $5x - 3 \geq 2x + 9$. Restamos $2x$: $3x - 3 \geq 9$. Sumamos 3: $3x \geq 12$. Dividimos entre 3: $x \geq 4$. Solución: $[4, \infty)$. Comprobación con $x = 4$: $5(4) - 3 = 17$ y $2(4) + 9 = 17$, $17 \geq 17$ (correcto). b) $4(x - 2) < 3x + 5$. Distribuimos: $4x - 8 < 3x + 5$. Restamos $3x$: $x - 8 < 5$. Sumamos 8: $x < 13$. Solución: $(-\infty, 13)$. Comprobación con $x = 12$: $4(10) = 40 < 3(12) + 5 = 41$ (correcto). c) $(2x + 1)/3 \leq x - 2$. Multiplicamos por 3: $2x + 1 \leq 3x - 6$. Restamos $2x$: $1 \leq x - 6$. Sumamos 6: $7 \leq x$, es decir $x \geq 7$. Solución: $[7, \infty)$. Comprobación con $x = 7$: $(15)/3 = 5 \leq 7 - 2 = 5$ (correcto).
- 2) a) $x^2 - 9 > 0$. Factorizamos: $(x - 3)(x + 3) > 0$, raíces -3 y 3. Probamos: con $x = 0$: $-9 > 0$ es falso; con $x = 4$: $16 - 9 = 7 > 0$ (cumple); con $x = -4$: $16 - 9 = 7 > 0$ (cumple). Solución: $x < -3$ o $x > 3$, es decir $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$. Factorizamos: $(x + 3)^2 \leq 0$. Un cuadrado solo es menor o igual que cero cuando vale cero: $x + 3 = 0$, $x = -3$. Solución: $x = -3$ (un solo valor). Comprobación: $9 - 18 + 9 = 0 \leq 0$ (correcto). c) $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$. Multiplicamos por -1 e invertimos el sentido: $x^2 - 4x + 3 \leq 0$. Factorizamos: $(x - 1)(x - 3) \leq 0$, raíces 1 y 3. Probamos: con $x = 0$: $3 \leq 0$ es falso; con $x = 2$: $4 - 8 + 3 = -1 \leq 0$ (cumple); con $x = 4$: $16 - 16 + 3 = 3 \leq 0$ es falso. Solución: $1 \leq x \leq 3$, es decir $[1, 3]$. Comprobación en la original con $x = 2$: $-4 + 8 - 3 = 1 \geq 0$ (correcto).

3) a) Primera: $2x > 8$, $x > 4$, intervalo $(4, \text{inf})$. Segunda: $x \leq 5$, intervalo $(-\text{inf}, 5]$. Intersección: $(4, 5]$. Comprobación con $x = 5$: $2(5) - 3 = 7 > 5$ (correcto) y $5 + 1 = 6 \leq 6$ (correcto). Solución: $4 < x \leq 5$. b) Primera: $3x \geq 6$, $x \geq 2$, intervalo $[2, \text{inf})$. Segunda: $-x > -4$, $x < 4$ (al multiplicar por -1 se invierte), intervalo $(-\text{inf}, 4)$. Intersección: $[2, 4)$. Comprobación con $x = 2$: $3(2) + 2 = 8 \geq 8$ (correcto) y $5 - 2 = 3 > 1$ (correcto). Solución: $2 \leq x < 4$.

4) a) $x \leq -1$ corresponde al intervalo $(-\text{inf}, -1]$. Representación: punto relleno en el -1 y sombreado hacia la izquierda sin límite. b) El intervalo $(0, 5]$ corresponde a $0 < x \leq 5$. Representación: punto hueco en el 0 , punto relleno en el 5 y sombreado entre ambos. c) Traducimos: $2x + 5 < 17$. Restamos 5 : $2x < 12$. Dividimos entre 2 : $x < 6$. Solución: $(-\text{inf}, 6)$.

5) Primera inecuación: $2x \geq 6$, $x \geq 3$, intervalo $[3, \text{inf})$. Segunda: $3x < 15$, $x < 5$, intervalo $(-\text{inf}, 5)$. Intersección: $[3, 5)$. Representación: punto relleno en el 3 , punto hueco en el 5 y sombreado entre ambos. Comprobación con $x = 4$: $2(4) + 1 = 9 \geq 7$ (correcto) y $3(4) - 2 = 10 < 13$ (correcto).

6) $x^2 - 2x - 15 < 0$. Factorizamos: $(x - 5)(x + 3) < 0$, raíces -3 y 5 . Probamos: con $x = 0$: $-15 < 0$ (cumple); con $x = 6$: $36 - 12 - 15 = 9 < 0$ es falso. Solución: $-3 < x < 5$, es decir $(-3, 5)$. Comprobación dentro con $x = 0$: $-15 < 0$ (correcto). Comprobación fuera con $x = -4$: $16 + 8 - 15 = 9$, que no es menor que 0 (correcto, queda excluido).

7) Primera: $x > 6$, intervalo $(6, \text{inf})$. Segunda: $2x < 6$, $x < 3$, intervalo $(-\text{inf}, 3)$. La intersección está vacía porque ningún número es mayor que 6 y menor que 3 a la vez. El sistema no tiene solución.

8) La frase "mayores o iguales que -5 pero menores que 2 " se escribe $-5 \leq x < 2$. En notación de intervalo: $[-5, 2)$. Representación: punto relleno en el -5 , punto hueco en el 2 y sombreado entre ambos.

9) $3(x - 1) + 2 \geq 5x - 4$. Distribuimos: $3x - 3 + 2 \geq 5x - 4$, es decir $3x - 1 \geq 5x - 4$. Restamos $3x$: $-1 \geq 2x - 4$. Sumamos 4 : $3 \geq 2x$. Dividimos entre 2 : $3/2 \geq x$, es decir $x \leq 3/2$. Solución: $(-\text{inf}, 3/2]$. Comprobación con $x = 1$: $3(0) + 2 = 2 \geq 5 - 4 = 1$ (correcto). Comprobación con $x = 2$ (fuera): $3(1) + 2 = 5 \geq 10 - 4 = 6$ es falso (correcto, queda excluido).

10) Primera: $4x > 8$, $x > 2$, intervalo $(2, \text{inf})$. Segunda: $2x \leq 12$, $x \leq 6$, intervalo $(-\text{inf}, 6]$. Intersección: $(2, 6]$. Comprobación con $x = 3$: $4(3) - 1 = 11 > 7$ (correcto) y $2(3) + 3 = 9 \leq 15$ (correcto). Solución: $2 < x \leq 6$.

11) $-2x^2 + 8 > 0$. Dividimos entre -2 e invertimos el sentido: $x^2 - 4 < 0$. Factorizamos: $(x - 2)(x + 2) < 0$, raíces -2 y 2. Probamos: con $x = 0$: $-4 < 0$ (cumple); con $x = 3$: $9 - 4 = 5 < 0$ es falso. Solución: $-2 < x < 2$, es decir $(-2, 2)$. Comprobación en la original con $x = 0$ (dentro): $8 > 0$ (correcto). Comprobación con $x = 3$ (fuera): $-2(9) + 8 = -10 > 0$ es falso (correcto, queda excluido).

12) Primera: $x/3 \geq 1$, $x \geq 3$, intervalo $[3, \text{inf})$. Segunda: $2x < 14$, $x < 7$, intervalo $(-\text{inf}, 7)$. Intersección: $[3, 7)$. Comprobación con $x = 5$: $5/3 + 1 = 8/3 \geq 2$ (correcto) y $2(5) - 5 = 5 < 9$ (correcto). Solución: $3 \leq x < 7$.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 8

- Una inecuación es una desigualdad que se cumple solo para ciertos valores; su solución normalmente es un intervalo con infinitos valores.
- Se resuelven como las ecuaciones, con una regla nueva: al multiplicar o dividir entre un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.
- En las cuadráticas, encuentra las raíces, divídelas en intervalos y prueba un valor de cada uno; la parábola te dice dónde está el signo que buscas.
- Un sistema de inecuaciones se resuelve con la intersección de las soluciones: solo valen los números que cumplen todas a la vez. Si no hay traslape, no hay solución.
- En la recta numérica: punto relleno si el extremo se incluye ($\leq$, $\geq$), punto hueco si no ($<$, $>$); el infinito siempre lleva paréntesis.
- La notación de intervalo resume todo: $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, (a, inf) , $(-\text{inf}, b)$, y la unión $\cup$ cuando la solución tiene pedazos separados.

PARTE III: FUNCIONES

CAPÍTULO 9: INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES

Hasta ahora has trabajado con expresiones y ecuaciones sueltas. En este capítulo das el salto a las funciones: la herramienta que describe cómo una cantidad depende de otra. La temperatura según la hora, el costo según los kilómetros, la altura de una pelota según el tiempo: todo eso son funciones. Dominar este capítulo te abre la puerta al resto del libro, porque casi todo lo que sigue (polinomios, gráficas, aproximaciones) se escribe en el lenguaje de las funciones.

9.1 Definición de función

Una función es una regla que a cada valor de entrada le asigna exactamente un valor de salida. Piensa en una máquina: metes un número x , la máquina hace un cálculo, y saca un número único $f(x)$. Lo más importante es la palabra "exactamente": un mismo x no puede producir dos salidas distintas. La variable x se llama variable independiente (la que tú eliges) y $f(x)$ se llama variable dependiente (la que resulta).

La notación $f(x)$ se lee "f de x". Por ejemplo, si $f(x) = x + 3$, entonces $f(2)$ significa "sustituye x por 2", así que $f(2) = 5$.

Ejemplo 1: Determina si la regla $y = x + 3$ es una función. Solución: Toma cualquier valor de x . Si $x = 0$, $y = 3$. Si $x = 5$, $y = 8$. Cada valor de x produce un solo valor de y , porque sumar 3 da un único resultado. Por lo tanto, sí es una función.

Ejemplo 2: Determina si la relación dada por la tabla es una función:

x	y
1	5
2	7
1	9

Solución: Observa el valor $x = 1$. Aparece dos veces y produce dos salidas distintas: 5 y 9. Como un mismo x produce más de un valor de y , esta relación NO es una función. La entrada 1 no sabe cuál de los dos valores entregar.

Ejemplo 3: Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, calcula $f(-2)$. Solución: Sustituye x por -2 en toda la expresión: $f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 1$ Primero resuelve el cuadrado: $(-2)^2 = 4$, así que $2(4) = 8$. Luego: $-3(-2) = 6$. Entonces: $f(-2) = 8 + 6 + 1 = 15$.

Ejemplo 4: Determina si la ecuación $y^2 = x$ define una función. Solución: Toma $x = 4$. La ecuación queda $y^2 = 4$, que se cumple para $y = 2$ y también para $y = -2$, porque $(2)^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$. Un mismo $x = 4$ produce dos valores de y . Por lo tanto, NO es una función.

Ejemplo 5: Si $f(x) = (x + 1)/(x - 2)$, calcula $f(0)$ y explica qué pasa si intentas $f(2)$. Solución: Sustituye $x = 0$: $f(0) = (0 + 1)/(0 - 2) = 1/(-2) = -1/2$. Ahora intenta $x = 2$: $f(2) = (2 + 1)/(2 - 2) = 3/0$. La división entre cero no existe, así que $f(2)$ no está definido: el 2 no pertenece al dominio de esta función (lo estudiarás a fondo en la sección 9.2).

Ejemplo 6: Una función está definida por tramos: $f(x) = 2x$ si $x < 0$, y $f(x) = x + 1$ si $x \geq 0$. Calcula $f(-2)$ y $f(3)$. Solución: Para $x = -2$, como $-2 < 0$, usa la primera regla: $f(-2) = 2(-2) = -4$. Para $x = 3$, como $3 \geq 0$, usa la segunda: $f(3) = 3 + 1 = 4$. Sigue siendo una función: cada x cae en exactamente un tramo y recibe un solo valor. En $x = 0$ se usa la segunda regla: $f(0) = 0 + 1 = 1$.

9.2 Dominio y rango

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores de x que sí puedes meter a la máquina sin que se rompa. El rango es el conjunto de todos los valores de salida $f(x)$ que realmente pueden obtenerse.

Dos situaciones te quitan valores del dominio:

1. Una división entre cero: el denominador nunca puede ser cero.
2. Una raíz cuadrada (o de índice par) de un número negativo: el radicando debe ser mayor o igual a cero.

Ejemplo 1: Halla el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x - 2}$. Solución: El radicando no puede ser negativo, así que exige $x - 2 \geq 0$, de donde $x \geq 2$. El dominio es $[2, \infty)$. Para el rango, la raíz cuadrada siempre da resultados mayores o iguales a cero, y puede tomar cualquier valor ≥ 0 (por ejemplo, para $y = 10$ basta $x = 102$). El rango es $[0, \infty)$.

Ejemplo 2: Halla el dominio y el rango de $g(x) = 1/(x - 3)$. Solución: El denominador no puede ser cero, así que $x - 3 \neq 0$, de donde $x \neq 3$. El dominio es todos los reales excepto el 3. Para el rango: ¿puede $g(x)$ valer 0? La ecuación $1/(x - 3) = 0$ no tiene solución, porque una fracción con numerador 1 nunca vale cero. Cualquier otro valor sí se alcanza. El rango es todos los reales excepto el 0.

Ejemplo 3: Halla el dominio y el rango de $h(x) = x^2 + 4$. Solución: Puedes sustituir cualquier x sin problema: no hay divisiones ni raíces. El dominio es todos los reales. Como $x^2 \geq 0$ siempre, entonces $x^2 + 4 \geq 4$. El valor más pequeño posible es 4 (cuando $x = 0$). El rango es $[4, \infty)$.

Ejemplo 4: Halla el dominio de $f(x) = 3/(x^2 - 4)$. Solución: El denominador no puede ser cero: $x^2 - 4 \neq 0$. Factoriza: $(x - 2)(x + 2) \neq 0$, así que $x \neq 2$ y $x \neq -2$. El dominio es todos los reales excepto 2 y -2.

Ejemplo 5: Halla el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Solución: El radicando debe ser no negativo: $x^2 - 9 \geq 0$. Factoriza: $(x - 3)(x + 3) \geq 0$. El producto es positivo o cero cuando ambos factores tienen el mismo signo: eso ocurre si $x \geq 3$ (los dos positivos) o si $x \leq -3$ (los dos negativos). Entre -3 y 3 el producto es negativo y la raíz no existe. El dominio es $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$. Comprobación: $f(3) = \sqrt{0} = 0$; $f(4) = \sqrt{7}$, válido; $f(0) = \sqrt{-9}$, no existe. Correcto.

Ejemplo 6: Halla el rango de $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$. Solución: No hay restricciones de dominio: puedes meter cualquier x . Pero la salida sí tiene límite. Como $a = -2 < 0$, la parábola abre hacia abajo y el vértice es el punto más alto. $x_v = -8/(2 \cdot (-2)) = -8/(-4) = 2$. $y_v = f(2) = -2(2)^2 + 8(2) - 3 = -8 + 16 - 3 = 5$. El valor máximo es 5, así que el rango es $(-\infty, 5]$. Comprobación: $f(2) = 5$ y ningún otro x da más que eso.

9.3 Representación de funciones

Una misma función se puede representar de cuatro formas: con palabras, con una ecuación, con una tabla de valores y con una gráfica. Las cuatro dicen lo mismo; solo cambia el formato. En este capítulo usaremos tablas de texto y descripciones de gráficas.

Ejemplo 1: Representa $f(x) = 2x - 1$ con una tabla de valores y describe su gráfica. Solución: Elige valores de x y calcula $f(x)$:

x	$f(x)$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

Cada fila se vuelve un punto del plano: $(-2, -5)$, $(-1, -3)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$. Al marcarlos, todos quedan alineados: forman una recta que sube de izquierda a derecha, porque al aumentar x , $f(x)$ también aumenta. La recta cruza el eje y en $(0, -1)$.

Ejemplo 2: Representa $g(x) = x^2$ con una tabla de valores y describe su gráfica. Solución: Tabla:

x	$g(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Los puntos $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ no forman una recta. Al unirlos con una curva suave obtienes una "U" abierta hacia arriba: baja hasta el origen y luego vuelve a subir. Esta curva se llama parábola. Nota que la tabla es simétrica: $g(-1) = g(1)$ y $g(-2) = g(2)$.

Ejemplo 3: Un taxi cobra \$15 de banderazo más \$8 por cada kilómetro. Representa el costo con palabras, ecuación y tabla. Solución: Con palabras: "el costo es 15 más 8 veces el número de kilómetros". Con ecuación: si x son los kilómetros, $f(x) = 8x + 15$. Con tabla:

x (km)	$f(x)$ (\$)
0	15
5	55
10	95
15	135

Verificación: para 5 km, $8(5) + 15 = 40 + 15 = 55$, correcto. La gráfica sería una recta que empieza en $(0, 15)$.

Ejemplo 4: Clasifica estas correspondencias como función o no función usando diagramas de flechas. Solución: Caso A: $1 \Rightarrow 5$, $2 \Rightarrow 7$, $3 \Rightarrow 5$. Cada número de la izquierda tiene exactamente una flecha de salida, aunque el 1 y el 3 apunten al mismo 5. Sí es función. Caso B: $1 \Rightarrow 5$, $2 \Rightarrow 7$, $1 \Rightarrow 9$. El número 1 tiene dos flechas de salida (hacia 5 y hacia 9). NO es función. La moraleja: varios x pueden compartir un mismo y , pero un x nunca puede tener dos y .

Ejemplo 5: Representa $f(x) = -x + 4$ con una tabla y describe su gráfica. Solución: Tabla:

x	f(x)
-1	5
0	4
1	3
2	2
3	1

(Verificación: $-(-1) + 4 = 5$; $-(3) + 4 = 1$.) Los puntos $(-1, 5)$, $(0, 4)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ forman una recta que baja de izquierda a derecha: es decreciente porque al aumentar x , $f(x)$ disminuye. Cruza el eje y en $(0, 4)$ y el eje x en $(4, 0)$, que es su raíz.

Ejemplo 6: Grafica $f(x) = (1/2)x - 1$ usando una tabla de valores. Solución: Tabla:

x	f(x)
-2	-2
0	-1
2	0
4	1

(Verificación: $(1/2)(-2) - 1 = -1 - 1 = -2$; $(1/2)(4) - 1 = 2 - 1 = 1$.) Los puntos forman una recta de pendiente $1/2$: sube despacio, la mitad de inclinada que $y = x$. Cruza el eje y en $(0, -1)$ y el eje x en $(2, 0)$.

9.4 Funciones lineales

Una función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente (qué tan inclinada va la recta y en qué dirección) y b es la ordenada al origen (dónde cruza el eje y). Si $m > 0$ la recta sube; si $m < 0$ la recta baja; si $m = 0$ es horizontal.

Ejemplo 1: Para $f(x) = 3x - 2$, halla la pendiente, la intersección con el eje y , el cero y describe su gráfica. Solución: La pendiente es $m = 3$ y la intersección con el eje y es $b = -2$, o sea el punto $(0, -2)$. El cero se encuentra resolviendo $f(x) = 0$: $3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = 2/3$. Como $m = 3 > 0$, la recta es creciente: sube de izquierda a derecha, cruza el eje y en $(0, -2)$ y el eje x en $(2/3, 0)$.

Ejemplo 2: Halla la ecuación de la recta que pasa por $(1, 2)$ y $(5, 10)$. Solución: La pendiente es $m = (10 - 2)/(5 - 1) = 8/4 = 2$. Usa la forma punto pendiente con el punto $(1, 2)$: $y - 2 = 2(x - 1)$. Desarrolla: $y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x$. Verificación: para $x = 1$, $y = 2$; para $x = 5$, $y = 10$. Ambos puntos cumplen. La función es $f(x) = 2x$.

Ejemplo 3: Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 2x + 1$ que pasa por $(0, -3)$. Solución: Las rectas paralelas tienen la misma pendiente. La recta dada tiene $m = 2$, así que la buscada también tiene $m = 2$. Como pasa por $(0, -3)$, su ordenada al origen es $b = -3$. La ecuación es $y = 2x - 3$, o $f(x) = 2x - 3$.

Ejemplo 4: Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x + 2$ que pasa por $(2, 1)$. Solución: Las pendientes perpendiculares son recíprocas negativas: 3 se convierte en $-1/3$. Con el punto $(2, 1)$: $y - 1 = (-1/3)(x - 2)$. Desarrolla: $y - 1 = (-1/3)x + 2/3 \Rightarrow y = (-1/3)x + 5/3$. Verificación: para $x = 2$, $y = -2/3 + 5/3 = 3/3 = 1$. Correcto.

Ejemplo 5: ¿Son funciones la recta horizontal $y = 5$ y la recta vertical $x = 2$? Explica. Solución: La recta horizontal $y = 5$ se escribe como $f(x) = 5$. Para cada x hay un solo y (siempre 5). Sí es función: es una función lineal con pendiente $m = 0$. La recta vertical $x = 2$, en cambio, asocia al valor $x = 2$ con infinitos valores de y $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 5)$... Como un mismo x produce muchos y , NO es función. Una prueba rápida: si una recta vertical corta la gráfica en más de un punto, no es función.

9.5 Funciones cuadráticas

Una función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola. Si $a > 0$, abre hacia arriba y tiene un mínimo; si $a < 0$, abre hacia abajo y tiene un máximo. El punto más bajo (o más alto) se llama vértice, y sus coordenadas son $x_v = -b/(2a)$, $y_v = f(x_v)$.

Ejemplo 1: Para $f(x) = x^2 - 4x + 3$, halla el vértice, las intersecciones y la dirección de apertura. Solución: $a = 1 > 0$, así que abre hacia arriba. El vértice: $x_v = -(-4)/(2 \cdot 1) = 4/2 = 2$. Luego $y_v = f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$. Vértice en $(2, -1)$, que es el mínimo. Intersecciones con el eje x : resuelve $x^2 - 4x + 3 = 0$. Factoriza: $(x - 1)(x - 3) = 0$, así que $x = 1$ y $x = 3$. Intersección con el eje y : $f(0) = 3$, punto $(0, 3)$.

Ejemplo 2: Para $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, halla el vértice, el máximo y las raíces. Solución: $a = -1 < 0$, así que abre hacia abajo. El vértice: $x_v = -6/(2 \cdot (-1)) = -6/(-2) = 3$. Luego $y_v = f(3) = -(3)^2 + 6(3) - 8 = -9 + 18 - 8 = 1$. Vértice en $(3, 1)$, que es el máximo de la función: ningún valor de $f(x)$ supera 1. Raíces: $-x^2 + 6x - 8 = 0$. Multiplica por -1 : $x^2 - 6x + 8 = 0$. Factoriza: $(x - 2)(x - 4) = 0$, así que $x = 2$ y $x = 4$.

Ejemplo 3: Escribe $f(x) = x^2 + 6x + 5$ en forma de vértice completando el cuadrado. Solución: Toma la mitad del coeficiente de x : $6/2 = 3$, y suma y resta $3^2 = 9$: $f(x) = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4$. El vértice se lee directo: $(-3, -4)$. Las raíces: $(x + 3)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 4 \Rightarrow x + 3 = \pm 2 \Rightarrow x = -1$ y $x = -5$. Comprobación: $(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$. Correcto.

Ejemplo 4: La altura de una pelota (en metros) después de t segundos es $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. ¿Cuál es la altura máxima y en qué momento ocurre? Solución: Es cuadrática con $a = -5 < 0$, así que el vértice da el máximo. $t_v = -20/(2 \cdot (-5)) = -20/(-10) = 2$. La altura máxima ocurre a los 2 segundos. $h(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 1 = -20 + 40 + 1 = 21$. La pelota alcanza 21 metros.

Ejemplo 5: Convierte $f(x) = (x - 2)^2 + 5$ a la forma estándar y halla su vértice. Solución: Desarrolla el cuadrado: $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Entonces $f(x) = x^2 - 4x + 4 + 5 = x^2 - 4x + 9$. Es una cuadrática con $a = 1 > 0$: abre hacia arriba. El vértice: $x_v = -(-4)/(2 \cdot 1) = 2$; $y_v = f(2) = 4 - 8 + 9 = 5$. Vértice en $(2, 5)$, que es el mínimo. De hecho, la forma $(x - 2)^2 + 5$ ya mostraba el vértice: $(2, 5)$, porque el cuadrado nunca es negativo y lo más pequeño que puede valer la función es 5.

Ejemplo 6: Para $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$, halla el vértice y el valor mínimo. Solución: $x_v = -(-6)/(2 \cdot 3) = 6/6 = 1$. $y_v = f(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 2 = 3 - 6 + 2 = -1$. El vértice es $(1, -1)$. Como $a = 3 > 0$, la parábola abre hacia arriba y el vértice es el mínimo: el valor más pequeño que toma la función es -1.

9.6 Funciones recíprocas

La función recíproca básica es $f(x) = 1/x$. Su dominio excluye $x = 0$. Su gráfica es una hipérbola con dos ramas: una en el primer cuadrante ($x > 0$) y otra en el tercero ($x < 0$). Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ (la curva se acerca al eje y sin tocarlo) y una asíntota horizontal en $y = 0$ (se acerca al eje x sin tocarlo).

Ejemplo 1: Construye una tabla para $f(x) = 1/x$ y describe su gráfica. Solución: Tabla:

x	$f(x)$
-2	$-1/2$
-1	-1
$-1/2$	-2
$1/2$	2
1	1
2	$1/2$

Nota que $f(x)$ nunca vale 0: el numerador 1 no permite que la fracción sea cero. Cuando x se acerca a 0 por la derecha, $f(x)$ crece sin límite ($1/0.001 = 1,000$); por la izquierda, decrece sin límite ($1/(-0.001) = -1,000$). Las dos ramas forman una hipérbola con asíntotas $x = 0$ y $y = 0$.

Ejemplo 2: Para $f(x) = 1/(x - 2)$, halla el dominio y las asíntotas. Solución: El denominador se anula cuando $x - 2 = 0$, o sea $x = 2$. Dominio: todos los reales excepto 2. La asíntota vertical es $x = 2$ (la gráfica se desplaza dos unidades a la derecha respecto de $1/x$). La asíntota horizontal

sigue siendo $y = 0$, porque al hacer x muy grande, el denominador crece y la fracción se acerca a 0. Verificación con puntos: $f(0) = -1/2$, $f(1) = -1$, $f(3) = 1$, $f(4) = 1/2$.

Ejemplo 3: Para $f(x) = 2/x + 1$, halla las asíntotas y evalúa en $x = 2$, $x = -1$ y $x = 1$. Solución: La asíntota vertical es $x = 0$. La asíntota horizontal es $y = 1$, porque cuando x es muy grande, $2/x$ se acerca a 0 y queda solo el 1. Evaluaciones: $f(2) = 2/2 + 1 = 2$. $f(-1) = 2/(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$. $f(1) = 2/1 + 1 = 3$. Observa que la gráfica de $2/x$ es más "abierto" que la de $1/x$, y el +1 la sube una unidad.

Ejemplo 4: Halla el dominio y las asíntotas de $g(x) = 3/(x^2 - 1)$. Solución: El denominador se anula cuando $x^2 - 1 = 0$, o sea $x^2 = 1$, de donde $x = 1$ y $x = -1$. Dominio: todos los reales excepto 1 y -1. Hay dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$. La asíntota horizontal es $y = 0$, porque el grado del denominador (2) es mayor que el del numerador (0) y la fracción tiende a 0 para x grandes.

Ejemplo 5: Describe la gráfica de $f(x) = 1/x^2$. Solución: El dominio excluye $x = 0$. Tabla:

x	$f(x)$
-2	$1/4$
-1	1
$-1/2$	4
$1/2$	4
1	1
2	$1/4$

Como el denominador es un cuadrado, $f(x)$ siempre es positiva: las dos ramas quedan arriba del eje x , una a la izquierda y otra a la derecha de $x = 0$. La asíntota vertical es $x = 0$ y la horizontal es $y = 0$. A diferencia de $1/x$, esta gráfica es simétrica respecto al eje y : $f(-2) = f(2)$.

Ejemplo 6: Halla el dominio de $g(x) = \sqrt{x}/(x - 1)$. Solución: Hay dos restricciones a la vez. La raíz exige $x \geq 0$ y el denominador exige $x \neq 1$. Combina ambas: el dominio es $[0, 1) \cup (1, \infty)$. Comprobación: $g(0) = 0/(-1) = 0$, válido; $g(4) = 2/3$, válido; $g(1) = 1/0$, no existe; $g(-1) = \sqrt{-1}/(-2)$, no existe. Correcto.

9.7 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 9

1. Determina si cada relación es una función y explica por qué:

a) $y = 5x - 2$ b) $x = y^2$ c) Los pares (1, 3), (2, 5), (3, 3), (1, 7)

2. Halla el dominio de cada función:

a) $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ b) $g(x) = 5/(x + 4)$ c) $h(x) = 1/(x^2 - 9)$

3. Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$, calcula $f(-1)$, $f(0)$ y $f(2)$.

4. Para $f(x) = 2x + 3$, construye una tabla con $x = -1, 0, 1, 2, 3$ y describe la gráfica que se obtiene.

5. Para $f(x) = -2x + 6$: halla la pendiente, la intersección con el eje y , el cero de la función y verifica evaluando en el cero.

6. Para $f(x) = x^2 + 2x - 8$, halla el vértice, las intersecciones con los ejes y la dirección de apertura.

7. Para $f(x) = 3/(x - 1)$, halla el dominio y las asíntotas vertical y horizontal.

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por $(2, 5)$ y es perpendicular a $y = (1/3)x - 2$.

SOLUCIONES

1. a) Sí es función: cada x produce un único $y = 5x - 2$. b) No es función: para $x = 4$ se tiene $y = 2$ y $y = -2$ (porque $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$). c) No es función: el valor $x = 1$ aparece con dos salidas distintas, 3 y 7.

2. a) El radicando debe ser no negativo: $3x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$. Dominio: $[2, \infty)$. b) El denominador no puede ser cero: $x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$. Dominio: todos los reales excepto -4 . c) $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ y $x \neq -3$. Dominio: todos los reales excepto 3 y -3 .

3. $f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$. $f(0) = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2$. $f(2) = (2)^2 - 3(2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$.

4. Tabla:

x	$f(x)$
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9

(Verificación: $2(-1) + 3 = 1$; $2(3) + 3 = 9$.) Los puntos $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 7)$, $(3, 9)$ están alineados: forman una recta creciente que cruza el eje y en $(0, 3)$.

5. Pendiente $m = -2$ (la recta baja de izquierda a derecha). Intersección con el eje y : $f(0) = 6$, punto $(0, 6)$. Cero: $-2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$. Verificación: $f(3) = -2(3) + 6 = -6 + 6 = 0$. Correcto.

6. Vértice: $x_v = -2/(2 \cdot 1) = -1$; $y_v = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$. Vértice en $(-1, -9)$. Como $a = 1 > 0$, abre hacia arriba y el vértice es el mínimo. Intersecciones con el eje x : $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = -4$ y $x = 2$. Intersección con el eje y : $f(0) = -8$, punto $(0, -8)$.

7. Dominio: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$; todos los reales excepto 1. Asíntota vertical: $x = 1$. Asíntota horizontal: $y = 0$ (el numerador es constante y el denominador crece sin límite).

8. La pendiente dada es $1/3$, así que la perpendicular tiene pendiente $m = -3$ (recíproca negativa). Con el punto $(2, 5)$: $y - 5 = -3(x - 2) \Rightarrow y - 5 = -3x + 6 \Rightarrow y = -3x + 11$. Verificación: para $x = 2$, $y = -6 + 11 = 5$. Correcto.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 9

- Una función es una regla que a cada valor de entrada le asigna exactamente un valor de salida; se escribe $f(x)$ y se lee "f de x".
- El dominio es todo lo que sí puedes meter a la función; se achica con dos prohibiciones: dividir entre cero y sacar raíz de índice par de un número negativo.
- El rango es el conjunto de todas las salidas posibles de la función.
- Una misma función se puede ver de cuatro formas: con palabras, con una ecuación, con una tabla de valores y con una gráfica.
- La función lineal $f(x) = mx + b$ es una recta: m es la pendiente (qué tan inclinada) y b es dónde cruza el eje y . La cuadrática es una parábola y la recíproca $1/x$ es una hipérbola.

CAPÍTULO 10: FUNCIONES POLINÓMICAS

Los polinomios son las funciones más nobles de las matemáticas: se pueden sumar, restar, multiplicar, derivar e integrar sin salir de la familia, y con ellos se aproxima casi cualquier otra función. En este capítulo los estudias por grados: primer grado (rectas), segundo grado (parábolas) y tercer grado (cúbicas), y cierras con una probada del polinomio de Taylor, la técnica que convierte funciones difíciles en polinomios manejables.

10.1 Funciones de primer grado

Una función de primer grado es un polinomio de grado 1: $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$. Es el mismo objeto que la función lineal del capítulo anterior, pero aquí la estudiamos como polinomio: nos interesa su raíz (dónde se anula), su signo (dónde es positiva o negativa) y la intersección de dos de ellas.

La raíz de $f(x) = ax + b$ se obtiene resolviendo $ax + b = 0$, o sea $x = -b/a$. Si $a > 0$, la función es creciente: es negativa antes de su raíz y positiva después. Si $a < 0$, es decreciente: es positiva antes de su raíz y negativa después.

Otra forma de verlo: el polinomio de primer grado es la herramienta más simple para modelar relaciones de cambio constante. La pendiente a te dice cuánto cambia $f(x)$ por cada unidad que aumenta x , y b te dice el valor inicial cuando $x = 0$. Por eso aparece en costos, distancias, temperaturas y cualquier fenómeno con ritmo fijo.

Ejemplo 1: Para $f(x) = 5x - 10$, halla la raíz y determina el signo de la función. Solución: Raíz: $5x - 10 = 0 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$. Como $a = 5 > 0$, la función es creciente. Entonces $f(x) < 0$ para $x < 2$ y $f(x) > 0$ para $x > 2$. Comprobación: $f(0) = -10 < 0$; $f(4) = 20 - 10 = 10 > 0$. Correcto.

Ejemplo 2: Halla la ecuación del polinomio de primer grado que pasa por $(-1, 4)$ y $(3, -4)$, y encuentra su raíz. Solución: La pendiente es $a = (-4 - 4)/(3 - (-1)) = (-8)/4 = -2$. Con el punto $(-1, 4)$: $y - 4 = -2(x + 1) \Rightarrow y - 4 = -2x - 2 \Rightarrow y = -2x + 2$. La función es $f(x) = -2x + 2$. Verificación con $(3, -4)$: $-2(3) + 2 = -4$. Correcto. Raíz: $-2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Ejemplo 3: Halla el punto de intersección de las rectas $y = 2x + 1$ y $y = -x + 7$. Solución: En el punto de intersección ambas expresiones valen lo mismo: $2x + 1 = -x + 7$. Suma x a ambos lados: $3x + 1 = 7$. Resta 1: $3x = 6 \Rightarrow x = 2$. Sustituye en cualquiera de las dos: $y = 2(2) + 1 = 5$. El punto es $(2, 5)$. Comprobación en la segunda: $-(2) + 7 = 5$. Correcto.

Ejemplo 4: Un plan de telefonía cobra \$100 fijos más \$30 por cada gigabyte: $f(x) = 30x + 100$. ¿Cuántos gigabytes se usaron si la cuenta fue de \$400? Solución: Resuelve $30x + 100 = 400$.

Resta 100: $30x = 300$. Divide entre 30: $x = 10$. Se usaron 10 gigabytes. Comprobación: $30(10) + 100 = 400$. Correcto.

Ejemplo 5: ¿Para qué valores de k la función $f(x) = (k - 2)x + 5$ es creciente? ¿Y decreciente?
Solución: El signo de la pendiente $a = k - 2$ decide. Es creciente si $a > 0$, o sea $k - 2 > 0 \Rightarrow k > 2$. Es decreciente si $a < 0$, o sea $k < 2$. Si $k = 2$, la función queda $f(x) = 5$, constante. Comprobación con $k = 3$: $f(x) = x + 5$, pendiente $1 > 0$, creciente. Con $k = 0$: $f(x) = -2x + 5$, pendiente $-2 < 0$, decreciente. Correcto.

Ejemplo 6: Determina si las rectas $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 3x - 4$ se intersectan. Solución: Iguala las expresiones: $3x + 1 = 3x - 4$. Resta $3x$ a ambos lados: $1 = -4$. Esto es falso siempre: la ecuación no tiene solución. Las rectas tienen la misma pendiente (3) pero distinto b , así que son paralelas y nunca se cruzan. En términos de polinomios, $f(x) - g(x) = 5$ nunca se anula.

Ejemplo 7: Grafica $f(x) = -3x + 2$ con una tabla de valores. Solución: Tabla:

x	$f(x)$
-1	5
0	2
1	-1
2	-4

(Verificación: $-3(-1) + 2 = 5$; $-3(2) + 2 = -4$.) Es una recta decreciente de pendiente -3: baja tres unidades por cada unidad que avanza x . Su raíz está en $x = 2/3$, porque $-3(2/3) + 2 = -2 + 2 = 0$.

Ejemplo 8: Halla el polinomio de primer grado con pendiente 2 tal que $f(4) = 10$. Solución: La forma es $f(x) = 2x + b$. Usa el dato: $f(4) = 2(4) + b = 10 \Rightarrow 8 + b = 10 \Rightarrow b = 2$. La función es $f(x) = 2x + 2$. Comprobación: $f(4) = 8 + 2 = 10$. Correcto.

Ejemplo 9: Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = -x + 5$, halla $(f + g)(x)$ y evalúa en $x = 1$. Solución: Suma término a término: $(f + g)(x) = (2x + 3) + (-x + 5) = x + 8$. Es otro polinomio de primer grado. Comprobación: $f(1) = 5$, $g(1) = 4$, y $f(1) + g(1) = 9$; $(f + g)(1) = 1 + 8 = 9$. Correcto.

Ejemplo 10: Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$, halla la composición $f(g(x))$. Solución: Sustituye $g(x)$ dentro de f : $f(g(x)) = 2(g(x)) + 1 = 2(x - 3) + 1 = 2x - 6 + 1 = 2x - 5$. El resultado es otro polinomio de primer grado. Comprobación con $x = 4$: $g(4) = 1$ y $f(1) = 3$; por otro lado, $2(4) - 5 = 3$. Correcto.

Ejemplo 11: Halla el dominio y el rango de $f(x) = 7x - 3$. Solución: No hay divisiones ni raíces, así que el dominio es todos los reales. Para el rango: como la pendiente $7 \neq 0$, la recta sube sin límite en ambas direcciones y toma todos los valores reales. Dado cualquier y , puedes

despejar $x = (y + 3)/7$. El rango también es todos los reales. Esta es una propiedad de todo polinomio de primer grado: dominio y rango siempre son todos los reales.

Ejemplo 12: Para $f(x) = -x + 6$, halla las intersecciones con los ejes y el signo. Solución: Intersección con el eje y: $f(0) = 6$, punto $(0, 6)$. Raíz: $-x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6$, punto $(6, 0)$. Como la pendiente es $-1 < 0$, la función es decreciente: es positiva antes de su raíz y negativa después. Entonces $f(x) > 0$ para $x < 6$ y $f(x) < 0$ para $x > 6$. Comprobación: $f(0) = 6 > 0$; $f(10) = -10 + 6 = -4 < 0$. Correcto.

Ejemplo 13: La relación entre grados Fahrenheit y Celsius es $C = (5/9)(F - 32)$. Expresa C como función de F y convierte 77 °F a °C. Solución: Es un polinomio de primer grado en la variable F: $C(F) = (5/9)F - 160/9$. La pendiente es $5/9 \sim 0.556$: por cada grado Fahrenheit, la temperatura Celsius sube poco más de medio grado. Para $F = 77$: $C = (5/9)(77 - 32) = (5/9)(45) = 5 \cdot 5 = 25$. Así que 77 °F equivalen a 25 °C. Comprobación: $25 \cdot 9/5 + 32 = 45 + 32 = 77$. Correcto.

10.2 Funciones de segundo grado

Un polinomio de segundo grado es $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Todo lo del capítulo 9 sobre cuadráticas aplica, pero aquí profundizamos en dos herramientas: el discriminante y la factorización.

El discriminante es $D = b^2 - 4ac$ y te dice cuántas raíces reales tiene el polinomio:

- Si $D > 0$, hay dos raíces reales distintas.
- Si $D = 0$, hay una raíz real doble (la parábola toca el eje x en el vértice).
- Si $D < 0$, no hay raíces reales.

La fórmula general $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ te da las raíces, y con ellas factorizas: $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Además, toda parábola es simétrica respecto a una recta vertical llamada eje de simetría, que pasa por el vértice: su ecuación es $x = -b/(2a)$. Lo que está a la izquierda del eje es el espejo de lo que está a la derecha. Esto te sirve para graficar: si conoces un punto, su reflejado al otro lado del eje también pertenece a la parábola.

Ejemplo 1: Factoriza $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ y halla sus raíces y su vértice. Solución: Discriminante: $D = (-8)^2 - 4(2)(6) = 64 - 48 = 16 > 0$, así que hay dos raíces reales. Con la fórmula: $x = (8 \pm \sqrt{16})/4 = (8 \pm 4)/4$. Entonces $x = 12/4 = 3$ y $x = 4/4 = 1$. Factorización: $f(x) = 2(x - 1)(x - 3)$. Comprobación: $2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 8x + 6$. Correcto. Vértice: $x_v = 8/(2 \cdot 2) = 2$; $y_v = f(2) = 2(4) - 16 + 6 = 8 - 16 + 6 = -2$. Vértice en $(2, -2)$.

Ejemplo 2: Analiza $f(x) = x^2 + 4x + 4$. Solución: Discriminante: $D = 4^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$. Hay una raíz doble. Con la fórmula: $x = -4/2 = -2$. Factorización: $f(x) = (x + 2)^2$ (completa el cuadrado mentalmente o verifica: $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$). La parábola abre hacia arriba y toca el eje x exactamente en su vértice $(-2, 0)$.

Ejemplo 3: Determina si $f(x) = x^2 + x + 1$ tiene raíces reales y describe su signo. Solución: Discriminante: $D = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$. No hay raíces reales: la parábola nunca cruza el eje x. Como $a = 1 > 0$, abre hacia arriba, así que toda la gráfica está por encima del eje x. Por lo tanto $f(x) > 0$ para todo x real. Comprobación: $f(0) = 1 > 0$. Correcto.

Ejemplo 4: El producto de dos números es 24 y su suma es 10. Halla los números. Solución: Llama x a uno de los números; el otro es $10 - x$. Entonces $x(10 - x) = 24 \Rightarrow 10x - x^2 = 24 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$. Factoriza: $(x - 4)(x - 6) = 0$, así que $x = 4$ o $x = 6$. Los números son 4 y 6. Comprobación: $4 + 6 = 10$ y $4 \cdot 6 = 24$. Correcto.

Ejemplo 5: Para $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$, halla la suma y el producto de sus raíces sin resolver la ecuación. Solución: Si las raíces son r_1 y r_2 , se cumplen las relaciones de Vieta: $r_1 + r_2 = -b/a$ y $r_1 \cdot r_2 = c/a$. Aquí $a = 3$, $b = -12$, $c = 9$. Entonces $r_1 + r_2 = -(-12)/3 = 12/3 = 4$, y $r_1 \cdot r_2 = 9/3 = 3$. Dos números que sumen 4 y multipliquen 3: 1 y 3. Verificación: $f(1) = 3 - 12 + 9 = 0$; $f(3) = 3(9) - 36 + 9 = 27 - 36 + 9 = 0$. Correcto: las raíces son 1 y 3.

Ejemplo 6: Con 20 metros de cerca quieres cercar un terreno rectangular. ¿Qué dimensiones dan el área máxima? Solución: Si un lado mide x, el otro mide $10 - x$ (porque $2x + 2(10 - x) = 20$). El área es $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$, un polinomio de segundo grado con $a = -1 < 0$. El máximo está en el vértice: $x_v = -10/(2 \cdot (-1)) = 5$. Entonces el otro lado mide $10 - 5 = 5$. El área máxima es $A(5) = 5 \cdot 5 = 25 \text{ m}^2$, con un terreno cuadrado de 5 por 5. Nota que x debe estar entre 0 y 10 para que las dimensiones tengan sentido.

Ejemplo 7: ¿Para qué valor de k el polinomio $f(x) = kx^2 + 4x + 1$ tiene una raíz doble? Solución: La raíz doble ocurre cuando el discriminante es cero: $D = b^2 - 4ac = 16 - 4k(1) = 16 - 4k$. Iguala a cero: $16 - 4k = 0 \Rightarrow k = 4$. Con $k = 4$, $f(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$. Comprobación: $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$. La raíz doble es $x = -1/2$, donde la parábola toca el eje x en su vértice.

Ejemplo 8: Halla el vértice de $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ completando el cuadrado. Solución: Saca el 2 como factor común de los términos con x : $f(x) = 2(x^2 + 4x) + 5$. Completa el cuadrado dentro del paréntesis: la mitad de 4 es 2, y $2^2 = 4$. Suma y resta 4 dentro: $f(x) = 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 5 = 2((x + 2)^2 - 4) + 5 = 2(x + 2)^2 - 8 + 5 = 2(x + 2)^2 - 3$. El vértice es $(-2, -3)$, un mínimo porque $a = 2 > 0$. Comprobación con la fórmula: $x_v = -8/(2 \cdot 2) = -2$; $f(-2) = 2(4) - 16 + 5 = 8 - 16 + 5 = -3$. Correcto.

Ejemplo 9: Construye el polinomio de segundo grado con raíces 4 y -2 y coeficiente principal 1. Solución: Si las raíces son $r_1 = 4$ y $r_2 = -2$, el polinomio es $f(x) = (x - 4)(x + 2)$. Desarrolla: $x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$. Comprobación: $f(4) = 16 - 8 - 8 = 0$; $f(-2) = 4 + 4 - 8 = 0$. Correcto. Este es el camino inverso: de las raíces al polinomio.

Ejemplo 10: Multiplica $(x + 2)(x - 5)$ y clasifica el resultado. Solución: Aplica la distributiva: $(x + 2)(x - 5) = x \cdot x + x \cdot (-5) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-5) = x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10$. Es un polinomio de segundo grado con $a = 1$, $b = -3$, $c = -10$. Sus raíces son $x = 5$ y $x = -2$ (los valores que anulan cada factor). Comprobación: $(5)^2 - 3(5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$. Correcto.

Ejemplo 11: Para $f(x) = x^2 - 4x + 3$, halla el eje de simetría y usa la simetría para encontrar otro punto de la parábola. Solución: El eje de simetría es $x = -b/(2a) = 4/2 = 2$. Ya sabes que $(0, 3)$ está en la parábola (intersección con el eje y). El punto $(0, 3)$ está a 2 unidades a la izquierda del eje (de $x = 0$ a $x = 2$ hay 2 unidades), así que su reflejado está a 2 unidades a la derecha del eje: $x = 4$. Por simetría, $(4, 3)$ también pertenece a la parábola. Comprobación: $f(4) = 16 - 16 + 3 = 3$. Correcto.

Ejemplo 12: El ingreso por vender x artículos es $R(x) = -2x^2 + 60x$. ¿Cuántos artículos maximizan el ingreso y cuál es ese ingreso máximo? Solución: Es un polinomio de segundo grado con $a = -2 < 0$, así que el vértice da el máximo. $x_v = -60/(2 \cdot (-2)) = -60/(-4) = 15$. Se maximiza vendiendo 15 artículos. $R(15) = -2(15)^2 + 60(15) = -2(225) + 900 = -450 + 900 = 450$. El ingreso máximo es 450 (en las unidades monetarias que uses). Comprobación del vértice como punto medio de las raíces: $R(x) = -2x(x - 30)$, raíces 0 y 30; el punto medio es 15. Correcto.

Ejemplo 13: Halla los puntos de intersección de la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 3$ con la recta $y = x + 1$. Solución: Iguala las expresiones: $x^2 - 2x - 3 = x + 1$. Resta $x + 1$ a ambos lados: $x^2 - 3x - 4 = 0$. Factoriza: $(x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$ y $x = -1$. Para $x = 4$: $y = 4 + 1 = 5$, punto $(4, 5)$. Para $x = -1$: $y = -1 + 1 = 0$, punto $(-1, 0)$. Comprobación en la parábola: $f(4) = 16 - 8 - 3 = 5$; $f(-1) = 1 + 2 - 3 = 0$. Correcto: la recta corta a la parábola en dos puntos.

Ejemplo 14: Determina en qué intervalos $f(x) = x^2 - 3x - 4$ es positiva. Solución: Primero halla las raíces: $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$ y $x = -1$. Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba: es negativa entre sus raíces y positiva fuera de ellas. Entonces $f(x) > 0$ para

$x < -1$ o $x > 4$, y $f(x) < 0$ para $-1 < x < 4$. Comprobación: $f(0) = -4 < 0$ (está entre las raíces); $f(5) = 25 - 15 - 4 = 6 > 0$ (está fuera). Correcto.

10.3 Funciones de tercer grado

Un polinomio de tercer grado es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$. Su gráfica es una curva con forma de "S" alargada que puede tener hasta dos giros y hasta tres raíces reales. El comportamiento en los extremos depende del signo de a : si $a > 0$, la curva baja por la izquierda y sube por la derecha; si $a < 0$, sube por la izquierda y baja por la derecha.

Para factorizar, usa el teorema del factor: si al evaluar el polinomio en $x = r$ obtienes cero, entonces $(x - r)$ es un factor. Prueba primero con los divisores enteros del término independiente.

Un detalle útil: la multiplicidad de una raíz (cuántas veces se repite el factor) cambia cómo la gráfica cruza el eje x . Si la multiplicidad es impar (1, 3, 5...), la curva atraviesa el eje. Si es par (2, 4...), la curva toca el eje y "rebota" sin cruzarlo. Por ejemplo, en $f(x) = x^2(x - 2)$ la raíz $x = 0$ tiene multiplicidad 2: la gráfica toca el eje en 0 y rebota.

Ejemplo 1: Factoriza $f(x) = x^3 - x$ y halla sus raíces. Solución: Primero saca factor común: $f(x) = x(x^2 - 1)$. La diferencia de cuadrados se factoriza: $f(x) = x(x - 1)(x + 1)$. Las raíces son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Como $a = 1 > 0$, la curva viene de abajo por la izquierda, cruza el eje x en -1 , 0 y 1 , y se va hacia arriba por la derecha.

Ejemplo 2: Factoriza $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y halla sus raíces. Solución: Prueba con divisores de 6. Evalúa en $x = 1$: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Entonces $(x - 1)$ es factor. Divide el polinomio entre $(x - 1)$ por división sintética: Coeficientes: 1, -6, 11, -6. Con $r = 1$: baja el 1; $1 \cdot 1 = 1$, suma a -6 $\Rightarrow$ -5; $(-5) \cdot 1 = -5$, suma a 11 $\Rightarrow$ 6; $6 \cdot 1 = 6$, suma a -6 $\Rightarrow$ 0. El cociente es $x^2 - 5x + 6$, que se factoriza como $(x - 2)(x - 3)$. Resultado: $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Las raíces son 1, 2 y 3. Comprobación rápida: $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$; por $(x - 3)$: $x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Correcto.

Ejemplo 3: Factoriza $f(x) = x^3 - 8$ y determina sus raíces reales. Solución: Es una diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Con $a = x$ y $b = 2$: $f(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. La única raíz real es $x = 2$. El factor cuadrático no aporta más raíces reales: su discriminante es $2^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0$. Comprobación: $f(2) = 8 - 8 = 0$. Correcto.

Ejemplo 4: Describe el comportamiento en los extremos de $f(x) = -2x^3 + 5x$ y halla sus raíces. Solución: Como $a = -2 < 0$ y el grado es impar, la curva viene de arriba por la izquierda y se va hacia abajo por la derecha: cuando $x \Rightarrow -\infty$, $f(x) \Rightarrow +\infty$; cuando $x \Rightarrow +\infty$, $f(x) \Rightarrow -\infty$.

Raíces: saca factor común x : $f(x) = x(-2x^2 + 5)$. Entonces $x = 0$ o $-2x^2 + 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 5/2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5/2} \sim \pm 1.58$. Tres raíces reales: $-\sqrt{5/2}$, 0 y $\sqrt{5/2}$.

Ejemplo 5: Factoriza $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ y describe su gráfica cerca de la raíz. Solución: Reconoce el cubo de un binomio: $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Comprobación del desarrollo: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; por $(x + 1)$: $x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Correcto. Entonces $f(x) = (x + 1)^3$. Hay una sola raíz real, $x = -1$, pero con multiplicidad 3 (raíz triple). La gráfica cruza el eje x en -1 sin "rebotar": como el exponente es impar, la curva atraviesa el eje, aunque lo hace de forma más "aplanada" que una raíz simple.

Ejemplo 6: Factoriza $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ y halla sus raíces. Solución: Prueba con divisores de 2. En $x = 1$: $2 - 3 - 3 + 2 = -2 \neq 0$. En $x = 2$: $2(8) - 3(4) - 3(2) + 2 = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$. Entonces $(x - 2)$ es factor. División sintética con coeficientes 2, -3, -3, 2 y $r = 2$: baja el 2; $2 \cdot 2 = 4$, suma a -3 $\Rightarrow 1$; $1 \cdot 2 = 2$, suma a -3 $\Rightarrow -1$; $(-1) \cdot 2 = -2$, suma a 2 $\Rightarrow 0$. El cociente es $2x^2 + x - 1$, que se factoriza como $(2x - 1)(x + 1)$. Resultado: $f(x) = (x - 2)(2x - 1)(x + 1)$. Las raíces son $x = 2$, $x = 1/2$ y $x = -1$. Comprobación: $f(1/2) = 2(1/8) - 3(1/4) - 3(1/2) + 2 = 1/4 - 3/4 - 3/2 + 2 = 0$; $f(-1) = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$. Correcto.

Ejemplo 7: Halla las raíces de $f(x) = x^3 - 3x$ y describe cuántos giros tiene su gráfica. Solución: Sacar factor común: $f(x) = x(x^2 - 3)$. Las raíces son $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$ (aprox ± 1.73). Una cúbica con tres raíces reales distintas tiene dos giros: la curva cruza el eje x en $-\sqrt{3}$, sube hasta un máximo local, baja hasta un mínimo local y vuelve a subir cruzando en 0 y en $\sqrt{3}$. Esta es la típica forma de "S" de las cúbicas con tres raíces.

Ejemplo 8: Usa el teorema del residuo para factorizar $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Solución: El teorema del residuo dice que $f(r)$ es el residuo de dividir entre $(x - r)$; si $f(r) = 0$, entonces $(x - r)$ es factor. Prueba $r = 3$: $f(3) = 27 - 36 + 3 + 6 = 0$. Entonces $(x - 3)$ es factor. División sintética con coeficientes 1, -4, 1, 6 y $r = 3$: baja el 1; $1 \cdot 3 = 3$, suma a -4 $\Rightarrow -1$; $(-1) \cdot 3 = -3$, suma a 1 $\Rightarrow -2$; $(-2) \cdot 3 = -6$, suma a 6 $\Rightarrow 0$. El cociente es $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Resultado: $f(x) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$. Las raíces son 3, 2 y -1. Comprobación: $f(2) = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$; $f(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$. Correcto.

Ejemplo 9: Multiplica $(x^2 + 1)(x - 2)$ y verifica el grado del resultado. Solución: Distribuye: $(x^2 + 1)(x - 2) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. El término de mayor grado es x^3 , así que el resultado es un polinomio de tercer grado, como debe ser al multiplicar un polinomio de grado 2 por uno de grado 1. Sus raíces reales: $x^2 + 1$ nunca se anula en los reales, así que la única raíz real es $x = 2$.

Ejemplo 10: Analiza $f(x) = -x^3$. Solución: Es una cúbica con $a = -1 < 0$, así que el comportamiento en los extremos es el inverso del de x^3 : cuando $x \Rightarrow -\infty$, $f(x) \Rightarrow +\infty$; cuando $x \Rightarrow +\infty$, $f(x) \Rightarrow -\infty$. La única raíz real es $x = 0$, con multiplicidad 3 (factor x^3). Como la

multiplicidad es impar, la gráfica atraviesa el eje en el origen, aplanándose al pasar. La función es decreciente en todo su dominio: entre más grande es x , más negativo es $-x^3$.

Ejemplo 11: Factoriza $f(x) = x^3 - 9x$ y halla sus raíces. Solución: Saca factor común x : $f(x) = x(x^2 - 9)$. La diferencia de cuadrados se factoriza: $f(x) = x(x - 3)(x + 3)$. Las raíces son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -3$, todas simples (multiplicidad 1), así que la gráfica atraviesa el eje en cada una. Como $a = 1 > 0$, la curva viene de abajo por la izquierda y se va hacia arriba por la derecha. Comprobación: $f(3) = 27 - 27 = 0$; $f(-3) = -27 + 27 = 0$. Correcto.

Ejemplo 12: Factoriza $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$ por agrupación. Solución: Agrupa de dos en dos: $(x^3 + x^2) + (-9x - 9) = x^2(x + 1) - 9(x + 1)$. Saca el factor común $(x + 1)$: $f(x) = (x + 1)(x^2 - 9) = (x + 1)(x - 3)(x + 3)$. Las raíces son $x = -1$, $x = 3$ y $x = -3$. Comprobación: $f(3) = 27 + 9 - 27 - 9 = 0$; $f(-1) = -1 + 1 + 9 - 9 = 0$. Correcto.

Ejemplo 13: Halla el dominio y el rango de $f(x) = x^3 - 3x$. Solución: No hay divisiones ni raíces, así que el dominio es todos los reales. Para el rango: como el grado es impar y el coeficiente principal es positivo, la curva se va a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha de forma continua, así que toma todos los valores reales intermedios. El rango es todos los reales. Esta es una propiedad general: todo polinomio de grado impar tiene rango igual a todos los reales.

10.4 Polinomio de Taylor (introducción)

Hay funciones famosas, como e^x o $\sin(x)$, que no son polinomios y cuya evaluación directa no es obvia: ¿cómo calcula tu calculadora el valor de $\sin(0.2)$ con tantos decimales? La respuesta es el polinomio de Taylor: una forma de aproximar una función complicada con un polinomio sencillo, sumando más términos para lograr más precisión.

La idea central: cerca de un punto (casi siempre $x = 0$), la función se parece cada vez más a un polinomio si le agregas los términos correctos. No necesitas saber cálculo diferencial para usarlo; basta con conocer las fórmulas ya deducidas y evaluar el polinomio resultante.

¿Por qué polinomios y no otra cosa? Porque un polinomio solo usa sumas y multiplicaciones, las operaciones más baratas para una calculadora o una computadora. Cuando tu calculadora evalúa $\sin(0.2)$, en el fondo está sumando unos cuantos términos de un polinomio de Taylor, y lo hace en milisegundos. Esta idea, publicada por Brook Taylor en 1715, es la base del cálculo numérico moderno: puentes, aviones y videojuegos usan aproximaciones polinómicas todos los días.

Dos aproximaciones que debes conocer (válidas para x pequeños):

- $e^x \sim 1 + x + x^2/2$ (aproximación de orden 2)
- $\sin(x) \sim x - x^3/6$ (aproximación de orden 3)
- $\cos(x) \sim 1 - x^2/2$ (aproximación de orden 2)

El "orden" es la potencia más alta del polinomio. Entre más términos agregues, menor es el error, y la aproximación es mejor mientras x esté más cerca de 0.

Ejemplo 1: Aproxima $e^{0.1}$ con el polinomio de Taylor de orden 2. Solución: Usa $e^x \sim 1 + x + x^2/2$ con $x = 0.1$: $e^{0.1} \sim 1 + 0.1 + (0.1)^2/2 = 1 + 0.1 + 0.01/2 = 1 + 0.1 + 0.005 = 1.105$. El valor real es $e^{0.1} \sim 1.1052$. El error es de apenas 0.0002 con solo tres términos. Así de potente es la aproximación.

Ejemplo 2: Aproxima $\sin(0.2)$ con el polinomio de Taylor de orden 3. Solución: Usa $\sin(x) \sim x - x^3/6$ con $x = 0.2$: $\sin(0.2) \sim 0.2 - (0.2)^3/6 = 0.2 - 0.008/6 = 0.2 - 0.001333... = 0.198667$ (aprox). El valor real es $\sin(0.2) \sim 0.198669$. El error es menor que 0.000003. Con dos términos ya tienes cinco decimales correctos.

Ejemplo 3: Aproxima $\cos(0.1)$ con el polinomio de Taylor de orden 2 y analiza qué pasa si x se aleja de 0. Solución: Usa $\cos(x) \sim 1 - x^2/2$ con $x = 0.1$: $\cos(0.1) \sim 1 - (0.1)^2/2 = 1 - 0.01/2 = 1 - 0.005 = 0.995$. El valor real es $\cos(0.1) \sim 0.995004$. Excelente. Pero cuidado: si pruebas con $x = 2$, el polinomio da $1 - 4/2 = -1$, mientras que $\cos(2) \sim -0.416$. La aproximación de orden 2 ya no sirve para $x = 2$. Moraleja: el polinomio de Taylor es una aproximación local; entre más te alejes de 0, más términos necesitas.

Ejemplo 4: Aproxima e^1 con el polinomio de orden 2 y explica por qué el error es grande. Solución: Con $x = 1$: $e^1 \sim 1 + 1 + 1^2/2 = 2.5$. El valor real es $e \sim 2.71828$. El error es 0.218, mucho mayor que en el Ejemplo 1. ¿Por qué? Porque $x = 1$ ya no está tan cerca de 0, y un polinomio de orden 2 no tiene suficientes términos para seguir a la función tan lejos. La solución es subir el orden: con $e^x \sim 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$ (orden 4), $e^1 \sim 1 + 1 + 0.5 + 0.1667 + 0.0417 = 2.7083$, mucho más cerca de 2.71828. Cada término extra recorta el error.

Ejemplo 5: Aproxima $\sin(0.5)$ con el polinomio de orden 3 y evalúa la calidad del resultado. Solución: $\sin(0.5) \sim 0.5 - (0.5)^3/6 = 0.5 - 0.125/6 = 0.5 - 0.020833 = 0.479167$. El valor real es $\sin(0.5) \sim 0.479426$. El error es 0.00026: cuatro decimales correctos. Nota que el error aquí es mayor que en el Ejemplo 2 (donde $x = 0.2$), porque 0.5 está más lejos de 0. Esto confirma la regla de oro: el polinomio de Taylor funciona mejor cerca del punto donde se construye.

Ejemplo 6: Aproxima $e^{-0.1}$ con el polinomio de orden 2. Solución: La fórmula $e^x \sim 1 + x + x^2/2$ también funciona para x negativos. Con $x = -0.1$: $e^{-0.1} \sim 1 + (-0.1) + (-0.1)^2/2 = 1 - 0.1 + 0.01/2 = 1 - 0.1 + 0.005 = 0.905$. El valor real es $e^{-0.1} \sim 0.904837$. El error es 0.00016: la aproximación es buena porque -0.1 está cerca de 0. Nota que el término $x^2/2$ siempre suma (porque el cuadrado elimina el signo), mientras que el término x resta cuando x es negativo.

Ejemplo 7: Aproxima $\cos(0.2)$ con el polinomio de orden 2. Solución: Usa $\cos(x) \sim 1 - x^2/2$ con $x = 0.2$: $\cos(0.2) \sim 1 - (0.2)^2/2 = 1 - 0.04/2 = 1 - 0.02 = 0.98$. El valor real es $\cos(0.2) \sim 0.980067$. El error es 0.000067: cuatro decimales correctos con un polinomio de dos términos. Observa el patrón: para funciones pares como el coseno, la aproximación solo lleva potencias pares de x .

Ejemplo 8: Aproxima $\sin(0.3)$ con el polinomio de orden 3. Solución: $\sin(0.3) \sim 0.3 - (0.3)^3/6 = 0.3 - 0.027/6 = 0.3 - 0.0045 = 0.2955$. El valor real es $\sin(0.3) \sim 0.295520$. El error es 0.00002. Fíjate en la progresión de los ejemplos: con $x = 0.1$ el error fue 0.0000001, con $x = 0.2$ fue 0.000003 y con $x = 0.3$ es 0.00002. El error crece a medida que x se aleja de 0, exactamente como predice la teoría.

Resumen de fórmulas de Taylor alrededor de 0 (las tres que debes memorizar):

- $e^x \sim 1 + x + x^2/2$
- $\sin(x) \sim x - x^3/6$
- $\cos(x) \sim 1 - x^2/2$

Con esto cierras tu primer encuentro con una de las ideas más poderosas de las matemáticas: las funciones complicadas se pueden domar con polinomios. Cuando estudies cálculo diferencial verás de dónde salen exactamente estos términos (involucran derivadas evaluadas en el punto), pero desde hoy ya sabes usarlos, que es lo que importa para aproximar, estimar y programar.

10.5 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 10

1. Para $f(x) = 4x - 12$: halla su raíz y determina en qué intervalos la función es positiva y en cuáles es negativa.
2. Factoriza $f(x) = x^2 - 7x + 12$ y halla sus raíces.
3. Para $f(x) = -x^2 + 4x - 3$: halla el vértice, indica si es máximo o mínimo, y encuentra las intersecciones con ambos ejes.

4. El producto de dos números es 45 y su suma es 14. Halla los dos números.
5. Factoriza $f(x) = x^3 - 7x + 6$ y halla todas sus raíces reales.
6. Para $f(x) = x^3 - 2x^2$: halla sus raíces y describe el comportamiento de la gráfica en los extremos.
7. Usa el polinomio de Taylor de orden 2 para aproximar $e^{0.05}$ y compara tu resultado con el valor real $e^{0.05} \sim 1.051271$.
8. Usa el polinomio de Taylor de orden 3 para aproximar $\sin(0.1)$ y compara con el valor real $\sin(0.1) \sim 0.0998334$.
9. Para $f(x) = x^2 - 5x + 6$: halla sus raíces por factorización y verifica el resultado con la fórmula general.
10. Factoriza $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ y halla todas sus raíces reales.
11. Para $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$: halla el vértice y las raíces.
12. El largo de un rectángulo mide 3 metros más que su ancho y su área es 40 m^2 . Halla sus dimensiones.
13. Halla la ecuación del polinomio de primer grado que pasa por $(0, -4)$ y $(6, 8)$.
14. Aproxima $e^{0.2}$ con el polinomio de Taylor de orden 2 y compara con el valor real $e^{0.2} \sim 1.221403$.
15. Para $f(x) = -x^2 + 2x + 8$: halla el vértice, las raíces y la intersección con el eje y.
16. Factoriza $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ por agrupación y halla sus raíces.
17. Factoriza $f(x) = x^3 - 4x$ y halla sus raíces.

SOLUCIONES

1. Raíz: $4x - 12 = 0 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$. Como $a = 4 > 0$, la función es creciente: es negativa antes de la raíz y positiva después. $f(x) < 0$ para $x < 3$ y $f(x) > 0$ para $x > 3$. Comprobación: $f(0) = -12 < 0$; $f(5) = 20 - 12 = 8 > 0$. Correcto.
2. Busca dos números que multipliquen 12 y sumen -7: -3 y -4. Entonces $f(x) = (x - 3)(x - 4)$. Las raíces son $x = 3$ y $x = 4$. Comprobación: $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$. Correcto.
3. Vértice: $x_v = -4/(2 \cdot (-1)) = -4/(-2) = 2$; $y_v = f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$. Vértice en $(2, 1)$. Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo y el vértice es un máximo: ningún valor supera 1. Intersecciones con el eje x: $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow$ multiplica por -1: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$. Intersección con el eje y: $f(0) = -3$, punto $(0, -3)$.

4. Llama x a un número; el otro es $14 - x$. Entonces $x(14 - x) = 45 \Rightarrow 14x - x^2 = 45 \Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 0$. Busca dos números que multipliquen 45 y sumen 14: 5 y 9. Entonces $(x - 5)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 5$ o $x = 9$. Los números son 5 y 9. Comprobación: $5 + 9 = 14$ y $5 \cdot 9 = 45$. Correcto.

5. Prueba con divisores de 6. En $x = 1$: $1 - 7 + 6 = 0$, así que $(x - 1)$ es factor. División sintética con coeficientes 1, 0, -7, 6 y $r = 1$: baja el 1; $1 \cdot 1 = 1$, suma a 0 $\Rightarrow 1$; $1 \cdot 1 = 1$, suma a -7 $\Rightarrow -6$; $(-6) \cdot 1 = -6$, suma a 6 $\Rightarrow 0$. El cociente es $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. Resultado: $f(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$. Las raíces reales son $x = 1$, $x = -3$ y $x = 2$. Comprobación: $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$; por $(x - 2)$: $x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x - 3x + 6 = x^3 - 7x + 6$. Correcto.

6. Saca factor común: $f(x) = x^2(x - 2)$. Las raíces son $x = 0$ (raíz doble) y $x = 2$. Como el coeficiente principal es $1 > 0$ y el grado es impar (3), la curva viene de abajo por la izquierda y se va hacia arriba por la derecha: cuando $x \Rightarrow -\infty$, $f(x) \Rightarrow -\infty$; cuando $x \Rightarrow +\infty$, $f(x) \Rightarrow +\infty$.

7. Con $e^x \sim 1 + x + x^2/2$ y $x = 0.05$: $e^{0.05} \sim 1 + 0.05 + (0.05)^2/2 = 1 + 0.05 + 0.0025/2 = 1 + 0.05 + 0.00125 = 1.05125$. El valor real es 1.051271. El error es de apenas 0.000021, despreciable para casi cualquier aplicación práctica.

8. Con $\sin(x) \sim x - x^3/6$ y $x = 0.1$: $\sin(0.1) \sim 0.1 - (0.1)^3/6 = 0.1 - 0.001/6 = 0.1 - 0.0001667 = 0.0998333$. El valor real es 0.0998334. El error es de apenas 0.0000001: siete decimales correctos con un polinomio de dos términos.

9. Factorización: busca dos números que multipliquen 6 y sumen -5: -2 y -3. Entonces $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ y las raíces son $x = 2$ y $x = 3$. Verificación con la fórmula general: $x = (5 \pm \sqrt{25 - 24})/2 = (5 \pm 1)/2$. Da $x = 6/2 = 3$ y $x = 4/2 = 2$. Coincide con la factorización.

10. Prueba con divisores de 6. En $x = 1$: $1 + 2 - 5 - 6 = -8 \neq 0$. En $x = 2$: $8 + 8 - 10 - 6 = 0$. Entonces $(x - 2)$ es factor. División sintética con coeficientes 1, 2, -5, -6 y $r = 2$: baja el 1; $1 \cdot 2 = 2$, suma a 2 $\Rightarrow 4$; $4 \cdot 2 = 8$, suma a -5 $\Rightarrow 3$; $3 \cdot 2 = 6$, suma a -6 $\Rightarrow 0$. El cociente es $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$. Resultado: $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$. Las raíces reales son $x = 2$, $x = -1$ y $x = -3$. Comprobación: $(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$; por $(x + 3)$: $x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. Correcto.

11. Vértice: $x_v = -(-12)/(2 \cdot 2) = 12/4 = 3$; $y_v = f(3) = 2(9) - 12(3) + 10 = 18 - 36 + 10 = -8$. Vértice en $(3, -8)$, un mínimo porque $a = 2 > 0$. Raíces con la fórmula general: $x = (12 \pm \sqrt{144 - 80})/4 = (12 \pm \sqrt{64})/4 = (12 \pm 8)/4$. Da $x = 20/4 = 5$ y $x = 4/4 = 1$. Comprobación: $f(5) = 50 - 60 + 10 = 0$; $f(1) = 2 - 12 + 10 = 0$. Correcto.

12. Llama x al ancho; el largo es $x + 3$. El área es $x(x + 3) = 40 \Rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$. Factoriza: busca dos números que multipliquen -40 y sumen 3 : 8 y -5 . Entonces $(x + 8)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = -8$ o $x = 5$. El ancho no puede ser negativo, así que $x = 5$. Las dimensiones son 5 m de ancho y 8 m de largo. Comprobación: $8 = 5 + 3$ y $5 \cdot 8 = 40$. Correcto.

13. La pendiente es $m = (8 - (-4))/(6 - 0) = 12/6 = 2$. Como pasa por $(0, -4)$, la ordenada al origen es $b = -4$. La función es $f(x) = 2x - 4$. Comprobación: $f(0) = -4$; $f(6) = 12 - 4 = 8$. Correcto.

14. Con $e^x \sim 1 + x + x^2/2$ y $x = 0.2$: $e^{0.2} \sim 1 + 0.2 + (0.2)^2/2 = 1 + 0.2 + 0.04/2 = 1 + 0.2 + 0.02 = 1.22$. El valor real es 1.221403 . El error es 0.0014 , mayor que en el ejercicio 7 porque 0.2 está más lejos de 0 que 0.05 : otra muestra de que la aproximación empeora al alejarse del punto de construcción.

15. Vértice: $x_v = -2/(2 \cdot (-1)) = -2/(-2) = 1$; $y_v = f(1) = -(1)^2 + 2(1) + 8 = -1 + 2 + 8 = 9$. Vértice en $(1, 9)$, un máximo porque $a = -1 < 0$. Raíces: $-x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow$ multiplica por -1 : $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 4$ y $x = -2$. Intersección con el eje y : $f(0) = 8$, punto $(0, 8)$. Comprobación: $f(4) = -16 + 8 + 8 = 0$. Correcto.

16. Agrupa los términos de dos en dos: $f(x) = (x^3 - x^2) + (-4x + 4) = x^2(x - 1) - 4(x - 1)$. Saca el factor común $(x - 1)$: $f(x) = (x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$. Las raíces son $x = 1$, $x = 2$ y $x = -2$. Comprobación: $f(2) = 8 - 4 - 8 + 4 = 0$; $f(-2) = -8 - 4 + 8 + 4 = 0$. Correcto.

17. Saca factor común x : $f(x) = x(x^2 - 4)$. La diferencia de cuadrados se factoriza: $f(x) = x(x - 2)(x + 2)$. Las raíces son $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$. Comprobación: $f(2) = 8 - 8 = 0$; $f(-2) = -8 + 8 = 0$. Correcto.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 10

- Un polinomio de primer grado $f(x) = ax + b$ es una recta con raíz en $x = -b/a$; si $a > 0$ es creciente y si $a < 0$ es decreciente.
- Un polinomio de segundo grado es una parábola: el discriminante te dice cuántas raíces reales tiene y la fórmula general te las da; con ellas factorizas como $a(x - r_1)(x - r_2)$.
- Un polinomio de tercer grado tiene forma de S alargada y hasta dos vueltas; el teorema del factor te deja factorizarlo probando valores (si $f(r) = 0$, entonces $(x - r)$ es factor).
- La multiplicidad de una raíz cambia la gráfica: si es impar la curva atraviesa el eje, si es par la curva toca el eje y se regresa.
- El polinomio de Taylor aproxima funciones como e^x o $\sin(x)$ con polinomios cerca de $x = 0$: más términos y un x más cercano a cero dan mejor aproximación.

PARTE IV: ÁLGEBRA AVANZADA

CAPÍTULO 11: EXPONENTES Y RADICALES

Hasta aquí has trabajado con exponentes enteros positivos sin pensarlo mucho: x^2 , x^3 , etc. Ahora toca afinar la herramienta. Vas a ver que los exponentes negativos, los fraccionarios y los radicales son la misma idea dicha de formas distintas. Domina esto y la mitad de las matemáticas que vienen (incluidos los logaritmos del capítulo 12) se te va a hacer cuesta abajo.

La idea central del capítulo es una sola: un exponente fraccionario, un radical y una potencia son tres caras de la misma moneda. Cuando veas $x^{(1/2)}$, $\sqrt{x}$ y "la raíz cuadrada de x ", estás viendo lo mismo. Si interiorizas esa equivalencia, las reglas dejan de ser una lista para memorizar y se vuelven sentido común.

11.1 Leyes de los exponentes

Todo este capítulo se sostiene sobre unas cuantas reglas. Grábatelas, porque son las que vas a aplicar una y otra vez:

1. **Producto de la misma base:** $x^m * x^n = x^{(m+n)}$
2. **Potencia de una potencia:** $(x^m)^n = x^{(m*n)}$
3. **Potencia de un producto:** $(xy)^n = x^n * y^n$
4. **Cociente de la misma base:** $x^m / x^n = x^{(m-n)}$
5. **Potencia de un cociente:** $(x/y)^n = x^n / y^n$
6. **Exponente cero:** $x^0 = 1$ (con x distinto de cero)
7. **Exponente negativo:** $x^{(-n)} = 1 / x^n$

La regla 4 explica la 7: $x^3 / x^5 = x^{(3-5)} = x^{(-2)}$, y por otro lado $x^3 / x^5 = 1 / x^2$. Por eso $x^{(-2)} = 1 / x^2$.

Ejemplo 1: Simplifica $(2^3)^4 * 2^{(-5)}$.

Solución: primero la potencia de una potencia: $(2^3)^4 = 2^{(3*4)} = 2^{12}$. Ahora tienes $2^{12} * 2^{(-5)}$. Aplicas el producto de la misma base: $2^{(12-5)} = 2^7 = 128$.

Ejemplo 2: Simplifica $(x^2 * y^3)^4 / (x^3 * y)$.

Solución: primero distribuyes la potencia 4: $(x^2)^4 = x^8$ y $(y^3)^4 = y^{12}$, así que el numerador es $x^8 * y^{12}$. Ahora divides término a término: $x^8 / x^3 = x^{(8-3)} = x^5$ y $y^{12} / y = y^{(12-1)} = y^{11}$. Resultado: $x^5 * y^{11}$.

Ejemplo 3: Expresa $4a^{-2} * b^3$ sin exponentes negativos.

Solución: el único exponente negativo es $a^{-2} = 1 / a^2$. El resto se queda igual: $4 * b^3 * (1 / a^2) = 4b^3 / a^2$.

Ejemplo 4: Simplifica $(x^2)^3 * (x^5)^{-2}$.

Solución: $(x^2)^3 = x^6$ y $(x^5)^{-2} = x^{-10}$. Multiplicas: $x^6 * x^{-10} = x^{(6-10)} = x^{-4} = 1 / x^4$.

Ejemplo 5: Simplifica $(3x^2)^3 / (9x^5)$.

Solución: primero la potencia del producto: $(3x^2)^3 = 3^3 * (x^2)^3 = 27 * x^6$. Ahora divides: $27x^6 / (9x^5) = (27/9) * x^{(6-5)} = 3x$.

Errores comunes que te van a costar puntos si no los evitas:

- $(x + y)^2$ NO es $x^2 + y^2$. Eso es un binomio al cuadrado y se desarrolla: $x^2 + 2xy + y^2$.
- $x^3 + x^5$ NO es x^8 . La regla de sumar exponentes solo vale para multiplicación: $x^3 * x^5 = x^8$.
- $(x^3)^2$ NO es x^5 . Potencia de potencia se multiplican los exponentes: x^6 .

11.2 Exponentes racionales

Un exponente fraccionario es un radical disfrazado. La regla de oro es:

$$x^{(m/n)} = \text{raíz } n\text{-ésima de } x^m = (\text{raíz } n\text{-ésima de } x)^m$$

En nuestra notación: $x^{(1/2)} = \text{sqrt}(x)$ y $x^{(1/3)}$ es la raíz cúbica de x . El denominador del exponente dice qué raíz es; el numerador dice qué potencia.

Para evaluar un exponente racional conviene aplicar primero la raíz y después la potencia, porque los números se mantienen chicos.

Ejemplo 1: Evalúa $8^{(2/3)}$.

Solución: $8^{(2/3)}$ significa raíz cúbica de 8^2 , pero es más fácil al revés: (raíz cúbica de 8)² = $2^2 = 4$.

Ejemplo 2: Evalúa $16^{(3/4)}$.

Solución: (raíz cuarta de 16)³ = $2^3 = 8$.

Ejemplo 3: Evalúa $25^{(-3/2)}$.

Solución: el exponente negativo invierte primero: $25^{(-3/2)} = 1 / 25^{(3/2)}$. Ahora $25^{(3/2)} = (\text{sqrt}(25))^3 = 5^3 = 125$. Resultado: $1/125$.

Ejemplo 4: Simplifica $x^{(2/3)} * x^{(1/6)}$ usando las leyes de los exponentes.

Solución: misma base, se suman los exponentes: $2/3 + 1/6 = 4/6 + 1/6 = 5/6$. Resultado: $x^{(5/6)}$.

Ejemplo 5: Simplifica $(x^{(1/2)})^4 * x^{(-1)}$.

Solución: potencia de potencia: $(x^{(1/2)})^4 = x^{(4/2)} = x^2$. Ahora $x^2 * x^{(-1)} = x^{(2-1)} = x$. Compruébalo con la forma radical: $(\text{sqrt}(x))^4 = x^2$, y $x^2 / x = x$. Coincide.

Ejemplo 6: Escribe la raíz cúbica de x^5 usando un exponente racional y simplifica $x^{(5/3)} / x^{(2/3)}$.

Solución: la raíz cúbica de x^5 es $x^{(5/3)}$. Para el cociente aplicas la regla de la división: $x^{(5/3)} / x^{(2/3)} = x^{(5/3 - 2/3)} = x^{(3/3)} = x^1 = x$. Compruébalo en radicales: (raíz cúbica de x^5) / (raíz cúbica de x^2) = raíz cúbica de $x^3 = x$. Coincide.

Ojo con las bases negativas: $(-8)^{(1/3)} = -2$ tiene sentido (raíz cúbica), pero $(-16)^{(1/2)} = \text{sqrt}(-16)$ no es un número real. En este libro trabajamos con números reales, así que cuando veas un exponente con denominador par, la base tiene que ser mayor o igual a cero.

11.3 Radicales y su simplificación

Un radical es la operación inversa de una potencia: $\text{sqrt}(49) = 7$ porque $7^2 = 49$. Las dos reglas que simplifican todo son:

$$\text{sqrt}(a * b) = \text{sqrt}(a) * \text{sqrt}(b) \quad \text{sqrt}(a / b) = \text{sqrt}(a) / \text{sqrt}(b)$$

(con a, b mayores o iguales a cero, y b distinto de cero en el cociente).

Simplificar un radical significa sacarle todos los factores que sean cuadrados perfectos (4, 9, 16, 25, ...). La técnica: factoriza el número, busca cuadrados perfectos, y saca sus raíces.

Ejemplo 1: Simplifica $\text{sqrt}(48)$.

Solución: $48 = 16 \cdot 3$. Entonces $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$. Ya no puedes simplificar más porque 3 no tiene factores cuadrados.

Ejemplo 2: Simplifica $\sqrt{300}$.

Solución: $300 = 100 \cdot 3$. $\sqrt{300} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3}$.

Ejemplo 3: Simplifica $\sqrt{x^5}$, con x mayor o igual a cero.

Solución: $x^5 = x^4 \cdot x$. Entonces $\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot \sqrt{x}$. La idea general: cada dos exponentes sacan uno fuera.

Ejemplo 4: Simplifica $\sqrt{50 \cdot x^3 \cdot y^2}$, con x, y mayores o iguales a cero.

Solución: factoriza por partes. $50 = 25 \cdot 2$, $x^3 = x^2 \cdot x$, y^2 ya es cuadrado. Queda $\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y^2} = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{x} \cdot y = 5xy \cdot \sqrt{2x}$.

Ejemplo 5: Simplifica $\sqrt{20/45}$.

Solución: primero simplifica la fracción dentro del radical: $20/45 = 4/9$. Entonces $\sqrt{20/45} = \sqrt{4/9} = \sqrt{4} / \sqrt{9} = 2/3$. Moraleja: muchas veces conviene simplificar la fracción antes de separar el radical.

Ejemplo 6: Simplifica $\sqrt{9x^2 \cdot y^6}$, con x, y mayores o iguales a cero.

Solución: como todo el radicando es un cuadrado perfecto, puedes sacar la raíz directa: $\sqrt{(3xy^3)^2} = 3xy^3$. Compruébalo elevando al cuadrado: $(3xy^3)^2 = 9x^2 \cdot y^6$. Correcto.

11.4 Operaciones con radicales

Suma y resta. Solo puedes sumar o restar radicales que tengan el mismo radicando, igual que solo puedes sumar términos semejantes. Si el radicando no coincide, simplifica primero: muchas veces se vuelve el mismo.

Multiplicación y división. Aquí los radicandos sí se combinan: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ y $\sqrt{a} / \sqrt{b} = \sqrt{a / b}$.

Ejemplo 1: Calcula $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$.

Solución: el radicando es el mismo (5), así que sumas los coeficientes: $2 + 7 - 3 = 6$. Resultado: $6\sqrt{5}$.

Ejemplo 2: Calcula $\sqrt{12} + \sqrt{27}$.

Solución: los radicandos son distintos, pero simplifica cada uno. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$. $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$. Ahora sí son semejantes: $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Ejemplo 3: Calcula $\sqrt{50} - \sqrt{18}$.

Solución: simplifica cada radical. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$. Resta: $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Advertencia importante: $\sqrt{a + b}$ NO es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Compruébalo con números: $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, pero $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. No son iguales. El radical no se distribuye sobre sumas.

Ejemplo 4: Calcula $(3\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{8})$.

Solución: multiplica coeficientes con coeficientes y radicales con radicales: $(3 \cdot 2) \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}) = 6 \cdot \sqrt{16} = 6 \cdot 4 = 24$.

Ejemplo 5: Calcula $(\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2)$.

Solución: esto es un producto conjugado $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Aquí queda $(\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$. Fíjate cómo el radical desaparece: ese truco lo vas a usar en la racionalización.

Racionalizar el denominador significa eliminar los radicales del denominador, porque así la expresión queda en forma estándar.

Ejemplo 6: Racionaliza $6 / \sqrt{3}$.

Solución: multiplica arriba y abajo por $\sqrt{3}$: $(6 \cdot \sqrt{3}) / (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} / 3 = 2\sqrt{3}$.

Ejemplo 7: Racionaliza $4 / (\sqrt{5} - 1)$.

Solución: aquí multiplicas por el conjugado del denominador, $(\sqrt{5} + 1)$. Numerador: $4 \cdot (\sqrt{5} + 1) = 4\sqrt{5} + 4$. Denominador: $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 5 - 1 = 4$. Resultado: $(4\sqrt{5} + 4) / 4 = \sqrt{5} + 1$.

11.5 Ecuaciones con radicales

Para resolver una ecuación con radicales, el plan es siempre el mismo:

1. Aísla el radical en un lado de la ecuación.
2. Eleva al cuadrado (o a la potencia correspondiente) ambos lados para eliminar el radical.

3. Resuelve la ecuación que quede.
4. **Verifica cada solución en la ecuación original.** Este paso no es opcional: al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas, las llamadas soluciones extrañas.

Ejemplo 1: Resuelve $\sqrt{x + 5} = 7$.

Solución: el radical ya está aislado. Eleva al cuadrado: $x + 5 = 49$. Entonces $x = 44$. Verificas: $\sqrt{44 + 5} = \sqrt{49} = 7$. Correcto. Solución: $x = 44$.

Ejemplo 2: Resuelve $\sqrt{2x - 1} + 3 = 8$.

Solución: primero aíslas el radical: $\sqrt{2x - 1} = 5$. Eleva al cuadrado: $2x - 1 = 25$, de donde $2x = 26$ y $x = 13$. Verificas: $\sqrt{26 - 1} + 3 = \sqrt{25} + 3 = 5 + 3 = 8$. Correcto. Solución: $x = 13$.

Ejemplo 3: Resuelve $x + \sqrt{x} = 2$.

Solución: aíslas el radical: $\sqrt{x} = 2 - x$. Eleva al cuadrado: $x = (2 - x)^2 = 4 - 4x + x^2$. Pasas todo a un lado: $0 = 4 - 5x + x^2$, o sea $x^2 - 5x + 4 = 0$. Factorizas: $(x - 1)(x - 4) = 0$, así que $x = 1$ o $x = 4$. Ahora verificas. Con $x = 1$: $1 + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$. Sirve. Con $x = 4$: $4 + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$, que no es 2. Es solución extraña y se descarta. Solución: $x = 1$.

Ejemplo 4: Resuelve $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 1$.

Solución: aíslas uno de los radicales: $\sqrt{x + 3} = 1 + \sqrt{x - 2}$. Eleva al cuadrado: $x + 3 = 1 + 2\sqrt{x - 2} + (x - 2)$. Simplifica el lado derecho: $1 + x - 2 = x - 1$, así que $x + 3 = x - 1 + 2\sqrt{x - 2}$. Cancelas las x y queda $3 = -1 + 2\sqrt{x - 2}$, o sea $4 = 2\sqrt{x - 2}$, de donde $\sqrt{x - 2} = 2$. Eleva al cuadrado otra vez: $x - 2 = 4$, así que $x = 6$. Verificas: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$. Correcto. Solución: $x = 6$.

Ejemplo 5: Resuelve $x^{2/3} = 9$.

Solución: escribe el exponente como potencia de una raíz: $(\text{raíz cúbica de } x)^2 = 9$. Entonces la raíz cúbica de x puede ser 3 o -3, porque ambos al cuadrado dan 9. Si raíz cúbica de $x = 3$, $x = 27$. Si raíz cúbica de $x = -3$, $x = -27$. Verificas: $27^{2/3} = (\text{raíz cúbica de } 27)^2 = 3^2 = 9$, y $(-27)^{2/3} = (\text{raíz cúbica de } -27)^2 = (-3)^2 = 9$. Las dos sirven. Soluciones: $x = 27$ y $x = -27$.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 11

- Leyes de los exponentes: $x^m \cdot x^n = x^{(m+n)}$, $(x^m)^n = x^{(m \cdot n)}$, $x^m / x^n = x^{(m-n)}$, $x^0 = 1$, $x^{(-n)} = 1/x^n$.
- Exponente racional: $x^{(m/n)}$ es la raíz n -ésima de x^m . Primero la raíz, después la potencia.

- Para simplificar un radical, factoriza y saca los cuadrados perfectos: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
- Solo se suman radicales con el mismo radicando; para multiplicar y dividir se combinan los radicandos.
- Racionalizar: multiplica por $\sqrt{a}$ en el denominador simple, por el conjugado en el binomio.
- En ecuaciones con radicales: aísla, eleva, resuelve y verifica siempre. Las soluciones extrañas se descartan.

11.6 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 11

- Simplifica usando las leyes de los exponentes:
 - $x^4 \cdot x^7$
 - $(y^3)^5$
 - z^9 / z^4
- Expresa sin exponentes negativos ni exponente cero (supón que todas las variables son distintas de cero):
 - $3a^{-1}$
 - $(2x)^0$
 - $b^{-3} \cdot c^2$
- Evalúa:
 - $8^{2/3}$
 - $25^{-1/2}$
 - $81^{3/4}$
- Simplifica los radicales:
 - $\sqrt{80}$
 - $\sqrt{x^7}$, con x mayor o igual a cero
 - $\sqrt{18} / \sqrt{2}$
- Opera y simplifica:
 - $4\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$
 - $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$
 - Racionaliza el denominador de $6 / \sqrt{3}$
- Resuelve las ecuaciones y verifica cada solución:
 - $\sqrt{x - 1} = 4$
 - $\sqrt{3x + 1} + 2 = 7$
 - $x + \sqrt{x} = 6$
- Resuelve $\sqrt{x + 7} - \sqrt{x} = 1$. Verifica tu respuesta.
- Racionaliza el denominador de $4 / (\sqrt{5} - 1)$. Simplifica al máximo.

SOLUCIONES

- $x^4 \cdot x^7 = x^{(4+7)} = x^{11}$.
 - $(y^3)^5 = y^{(3 \cdot 5)} = y^{15}$.
 - $z^9 / z^4 = z^{(9-4)} = z^5$.

2. a) $3a^{-1} = 3 \cdot (1/a) = 3/a$.
 b) $(2x)^0 = 1$. c) $b^{-3} \cdot c^2 = c^2 / b^3$.
3. a) $8^{(2/3)} = (\text{raíz cúbica de } 8)^2 = 2^2 = 4$.
 b) $25^{(-1/2)} = 1 / \sqrt{25} = 1/5$. c) $81^{(3/4)} = (\text{raíz cuarta de } 81)^3 = 3^3 = 27$.
4. a) $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$.
 b) $\sqrt{x^7} = \sqrt{x^6 \cdot x} = x^3 \cdot \sqrt{x}$. c) $\sqrt{18} / \sqrt{2} = \sqrt{18/2} = \sqrt{9} = 3$.
5. a) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Entonces $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.
 b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. c) $6 / \sqrt{3} = (6 \cdot \sqrt{3}) / 3 = 2\sqrt{3}$.
6. a) Eleva al cuadrado: $x - 1 = 16$, $x = 17$. Verificación: $\sqrt{16} = 4$. Correcto.
 b) Aísla: $\sqrt{3x + 1} = 5$. Eleva: $3x + 1 = 25$, $x = 8$. Verificación: $\sqrt{25} + 2 = 7$. Correcto. c) $\sqrt{x} = 6 - x$. Eleva: $x = 36 - 12x + x^2$. Reordena: $x^2 - 13x + 36 = 0$, $(x - 4)(x - 9) = 0$. Candidatos: $x = 4$ y $x = 9$. Verificación: con $x = 4$, $4 + 2 = 6$, sirve. Con $x = 9$, $9 + 3 = 12$, no sirve (extraña). Solución: $x = 4$.
7. Aísla: $\sqrt{x + 7} = 1 + \sqrt{x}$. Eleva al cuadrado: $x + 7 = 1 + 2\sqrt{x} + x$. Simplifica: $7 = 1 + 2\sqrt{x}$, de donde $2\sqrt{x} = 6$ y $\sqrt{x} = 3$. Eleva otra vez: $x = 9$. Verificación: $\sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$. Correcto.
8. Multiplica por el conjugado ($\sqrt{5} + 1$): $4(\sqrt{5} + 1) / (5 - 1) = (4\sqrt{5} + 4) / 4 = \sqrt{5} + 1$.

CAPÍTULO 12: LOGARITMOS

Los logaritmos nacieron para simplificar cálculos difíciles y terminaron siendo una de las herramientas más importantes de la ciencia: miden terremotos, acidez, crecimiento de poblaciones e interés bancario. La buena noticia es que un logaritmo no es más que un exponente con otro nombre. Si dominaste el capítulo 11, este capítulo te va a fluir.

Piensa en el logaritmo como la pregunta inversa de la potencia. La potencia pregunta: "¿cuánto es 2^5 ?". El logaritmo pregunta: "¿a qué potencia elevo 2 para obtener 32?". Son dos formas de mirar la misma relación entre tres números: base, exponente y resultado.

12.1 Definición de logaritmo

El logaritmo en base b de un número a es el exponente al que hay que elevar b para obtener a :

$\log_b(a) = c$ significa que $b^c = a$

Las tres piezas tienen nombre: b es la base (b mayor que cero y b distinto de 1), a es el argumento (a mayor que cero) y c es el logaritmo. Fíjate en el círculo: la pregunta " $\log_b(a) = ?$ " siempre se responde con "¿a qué potencia elevo b para que me dé a ?".

Dos consecuencias inmediatas que te van a ahorrar mucho tiempo:

$\log_b(1) = 0$, porque $b^0 = 1$. $\log_b(b) = 1$, porque $b^1 = b$. Y también: $\log_b(b^n) = n$.

Ejemplo 1: Evalúa $\log_2(32)$.

Solución: preguntas ¿2 elevado a qué me da 32? Como $2^5 = 32$, $\log_2(32) = 5$.

Ejemplo 2: Evalúa $\log_3(1/27)$.

Solución: ¿3 elevado a qué me da $1/27$? Como $3^3 = 27$, entonces $3^{-3} = 1/27$. Por lo tanto $\log_3(1/27) = -3$.

Ejemplo 3: Evalúa $\log_5(1)$ y $\log_7(7)$.

Solución: $\log_5(1) = 0$ porque $5^0 = 1$. $\log_7(7) = 1$ porque $7^1 = 7$.

Ejemplo 4: Convierte $\log_4(x) = 3$ a forma exponencial y despeja x .

Solución: $\log_4(x) = 3$ significa $4^3 = x$. Entonces $x = 64$.

Ejemplo 5: Halla la base b si $\log_b(81) = 4$.

Solución: pasa a forma exponencial: $b^4 = 81$. Como $3^4 = 81$, $b = 3$. (La base de un logaritmo es positiva y distinta de 1, así que no consideramos $b = -3$.)

12.2 Propiedades de los logaritmos

Estas tres propiedades son el corazón del capítulo. Dicen que el logaritmo convierte multiplicaciones en sumas, divisiones en restas y potencias en multiplicaciones:

1. **Logaritmo de un producto:** $\log_b(x * y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
2. **Logaritmo de un cociente:** $\log_b(x / y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
3. **Logaritmo de una potencia:** $\log_b(x^n) = n * \log_b(x)$

(con x, y mayores que cero). Salen directamente de las leyes de los exponentes del capítulo 11, porque el logaritmo es un exponente.

Ejemplo 1: Expande $\log_3(27 * x^2)$.

Solución: por la propiedad del producto: $\log_3(27) + \log_3(x^2)$. Ahora $\log_3(27) = 3$ (porque $3^3 = 27$) y por la propiedad de la potencia $\log_3(x^2) = 2 * \log_3(x)$. Resultado: $3 + 2*\log_3(x)$.

Ejemplo 2: Combina $2*\log(x) + 3*\log(y) - \log(z)$ en un solo logaritmo.

Solución: primero usa la propiedad de la potencia al revés: $2*\log(x) = \log(x^2)$ y $3*\log(y) = \log(y^3)$. Queda $\log(x^2) + \log(y^3) - \log(z)$. Suma los dos primeros con la propiedad del producto: $\log(x^2 * y^3)$. Resta el último con la propiedad del cociente: $\log((x^2 * y^3) / z)$.

Ejemplo 3: Evalúa $\log_2(4) + \log_2(8)$ sin calculadora.

Solución: por la propiedad del producto, es $\log_2(4 * 8) = \log_2(32) = 5$. Compruébalo: $\log_2(4) = 2$, $\log_2(8) = 3$, y $2 + 3 = 5$. Coincide.

Ejemplo 4: Evalúa $\log_5(125) - \log_5(25)$.

Solución: por la propiedad del cociente, es $\log_5(125/25) = \log_5(5) = 1$. Compruébalo: $3 - 2 = 1$. Coincide.

Ejemplo 5: Calcula $\log(2) + \log(5)$ usando que $\log(2) \sim 0.3010$.

Solución: por la propiedad del producto, $\log(2) + \log(5) = \log(2 * 5) = \log(10) = 1$. Con decimales: $0.3010 + 0.6990 = 1.0000$. Coincide con el ejemplo 3 de la sección anterior, donde hallamos $\log(5) \sim 0.6990$.

Ejemplo 6: Escribe $\log(\sqrt{x})$ usando un logaritmo de x sin radical.

Solución: $\sqrt{x} = x^{(1/2)}$, así que $\log(\sqrt{x}) = \log(x^{(1/2)})$. Por la propiedad de la potencia: $(1/2) * \log(x)$. Esto confirma que las propiedades de los logaritmos y las leyes de los exponentes trabajan en equipo.

12.3 Logaritmo común y logaritmo natural

Hay dos bases tan importantes que tienen su propia notación:

Logaritmo común: $\log(x)$ significa $\log_{10}(x)$. La base 10 se omite por convención. Es el que usan la ingeniería y muchas escalas de medición.

Logaritmo natural: $\ln(x)$ significa $\log_e(x)$, donde e es el número de Euler, $e \sim 2.71828$. Es el que aparece en el crecimiento natural: poblaciones, desintegración radiactiva, interés continuo.

Las propiedades de la sección 12.2 valen igual para $\log$ y para $\ln$, porque solo cambia la base.

Ejemplo 1: Evalúa $\log(1,000)$ y $\log(0.01)$.

Solución: $\log(1,000) = 3$ porque $10^3 = 1000$. $\log(0.01) = -2$ porque $10^{-2} = 1/100 = 0.01$.

Ejemplo 2: Evalúa $\ln(e^5)$ y $\ln(1)$.

Solución: $\ln(e^5) = 5$ por la propiedad de la potencia: $5 * \ln(e) = 5 * 1 = 5$. $\ln(1) = 0$ porque $e^0 = 1$.

Ejemplo 3: Sin calculadora, expresa $\log(5)$ usando el valor $\log(2) \sim 0.3010$.

Solución: $5 = 10/2$, así que $\log(5) = \log(10/2) = \log(10) - \log(2) = 1 - 0.3010 = 0.6990$. Compruébalo mentalmente: $10^{0.6990} \sim 5$. Funciona.

Ejemplo 4: Simplifica $\ln(e^3 * e^4)$.

Solución: por la propiedad del producto: $\ln(e^3) + \ln(e^4) = 3 + 4 = 7$. O directo: $e^3 * e^4 = e^7$ y $\ln(e^7) = 7$.

Ejemplo 5: Halla x si $\ln(x) = 3$.

Solución: pasa a forma exponencial con base e : $x = e^3 \sim 20.0855$. Verificación: $\ln(20.0855) \sim 3$. Correcto.

12.4 Cambio de base

Tu calculadora solo tiene teclas para $\log$ (base 10) y $\ln$ (base e). Para calcular logaritmos en cualquier otra base usas la fórmula de cambio de base:

$$\log_b(a) = \log(a) / \log(b) = \ln(a) / \ln(b)$$

Da lo mismo usar $\log$ o $\ln$: el resultado es idéntico. También sirve para demostrar propiedades, como verás en el ejemplo 4.

Ejemplo 1: Calcula $\log_2(10)$ con tres decimales.

Solución: $\log_2(10) = \log(10) / \log(2) = 1 / 0.3010 \sim 3.322$. Verificación rápida: $2^{3.322} \sim 10$. Correcto.

Ejemplo 2: Calcula $\log_3(20)$ con tres decimales.

Solución: $\log_3(20) = \ln(20) / \ln(3) \sim 2.9957 / 1.0986 \sim 2.727$. Con logaritmo común sale lo mismo: $1.3010 / 0.4771 \sim 2.727$.

Ejemplo 3: Calcula el valor exacto de $\log_4(32)$ usando cambio de base.

Solución: $\log_4(32) = \ln(32) / \ln(4)$. Como $32 = 2^5$ y $4 = 2^2$, esto es $(5 \cdot \ln(2)) / (2 \cdot \ln(2)) = 5/2 = 2.5$. Compruébalo: $4^{2.5} = 4^2 \cdot \sqrt{4} = 16 \cdot 2 = 32$. Exacto.

Ejemplo 4: Demuestra que $\log_b(a) = 1 / \log_a(b)$.

Solución: por cambio de base, $\log_a(b) = \ln(b) / \ln(a)$. Su recíproco es $\ln(a) / \ln(b)$, que por cambio de base es exactamente $\log_b(a)$. Queda demostrado.

Ejemplo 5: Demuestra que $\log_2(3) \cdot \log_3(2) = 1$.

Solución: aplica cambio de base a cada factor. $\log_2(3) = \ln(3) / \ln(2)$ y $\log_3(2) = \ln(2) / \ln(3)$. Multiplica: $(\ln(3) / \ln(2)) \cdot (\ln(2) / \ln(3)) = 1$, porque todo se cancela. Queda demostrado.

12.5 Ecuaciones logarítmicas

Resolver ecuaciones con logaritmos sigue una lógica parecida a la de las ecuaciones con radicales: primero dejas un solo logaritmo aislado, luego "deshaces" el logaritmo pasando a forma exponencial, y al final **verificas**, porque el argumento de un logaritmo nunca puede ser cero ni negativo y ahí también aparecen soluciones extrañas.

Estrategias según el caso:

- Si tienes un solo logaritmo igual a un número: pasa a forma exponencial.

- Si tienes sumas o restas de logaritmos: combínalos con las propiedades hasta dejar uno solo.
- Si el logaritmo está en el exponente: usa ln en ambos lados.

Ejemplo 1: Resuelve $\log_2(x) = 5$.

Solución: pasa a forma exponencial: $x = 2^5 = 32$. El argumento 32 es positivo, así que sirve.

Solución: $x = 32$.

Ejemplo 2: Resuelve $\log(x) + \log(x - 3) = 1$.

Solución: combina con la propiedad del producto: $\log(x * (x - 3)) = 1$. Pasa a forma exponencial (base 10): $x * (x - 3) = 10^1 = 10$. Queda $x^2 - 3x - 10 = 0$, que factorizada es $(x - 5)(x + 2) = 0$. Candidatos: $x = 5$ y $x = -2$. Verificas: con $x = 5$, $\log(5) + \log(2) = \log(10) = 1$, sirve. Con $x = -2$, el argumento $\log(-2)$ no existe en los reales: es extraña y se descarta. Solución: $x = 5$.

Ejemplo 3: Resuelve $\ln(x) + \ln(x + 2) = \ln(15)$.

Solución: combina: $\ln(x * (x + 2)) = \ln(15)$. Si dos logaritmos naturales son iguales, sus argumentos son iguales: $x * (x + 2) = 15$. Queda $x^2 + 2x - 15 = 0$, factorizada $(x + 5)(x - 3) = 0$. Candidatos: $x = 3$ y $x = -5$. Verificas: con $x = 3$, $\ln(3) + \ln(5) = \ln(15)$, sirve. Con $x = -5$, $\ln(-5)$ no existe: extraña. Solución: $x = 3$.

Ejemplo 4: Resuelve $3^x = 20$.

Solución: aquí la incógnita está en el exponente. Aplica ln en ambos lados: $\ln(3^x) = \ln(20)$. Por la propiedad de la potencia: $x * \ln(3) = \ln(20)$. Despeja: $x = \ln(20) / \ln(3) \sim 2.9957 / 1.0986 \sim 2.727$. Verificación rápida: $3^{2.727} \sim 20$. Correcto.

Ejemplo 5: Resuelve $5^{(2x)} = 10$.

Solución: aplica ln en ambos lados: $\ln(5^{(2x)}) = \ln(10)$. Por la propiedad de la potencia: $2x * \ln(5) = \ln(10)$. Despeja: $x = \ln(10) / (2 * \ln(5)) \sim 2.3026 / 3.2189 \sim 0.715$. Verificación: $5^{(2 * 0.715)} = 5^{1.43} \sim 10$. Correcto.

Ejemplo 6: Resuelve $e^{(2x)} = 5$.

Solución: aquí conviene el logaritmo natural porque la base ya es e. Aplica ln en ambos lados: $\ln(e^{(2x)}) = \ln(5)$. El lado izquierdo se simplifica solo: $2x = \ln(5)$. Despeja: $x = \ln(5) / 2 \sim 1.6094 / 2 \sim 0.8047$. Verificación: $e^{(2 * 0.8047)} = e^{1.6094} \sim 5$. Correcto.

12.6 Aplicaciones

Aquí es donde los logaritmos se ganan el sueldo. Cada vez que una cantidad crece o decrece multiplicándose por un factor constante, los logaritmos aparecen para despejar el tiempo o comparar magnitudes.

Interés compuesto. Si inviertes un capital P a una tasa anual r , el monto después de t años es $A = P * (1 + r)^t$. Para hallar el tiempo t despejas con logaritmos: $t = \log(A / P) / \log(1 + r)$.

Ejemplo 1: Inviertes \$5,000 al 6% anual compuesto. ¿En cuántos años se duplica tu dinero?

Solución: quieres $A = 10,000$ con $P = 5,000$ y $r = 0.06$. La fórmula queda $10,000 = 5,000 * (1.06)^t$, o sea $2 = (1.06)^t$. Aplica log en ambos lados: $\log(2) = t * \log(1.06)$. Despeja: $t = \log(2) / \log(1.06) \sim 0.3010 / 0.0253 \sim 11.9$. Respuesta: en aproximadamente 11.9 años se duplica. Fíjate que el resultado no depende del capital inicial: cualquier cantidad al 6% se duplica en el mismo tiempo.

Crecimiento de poblaciones. Las poblaciones de bacterias (y en general el crecimiento natural) siguen el modelo $P = P_0 * e^{(k * t)}$, donde P_0 es la población inicial y k la tasa de crecimiento.

Ejemplo 2: Un cultivo de bacterias se duplica cada 3 horas. Si empiezas con 1,000 bacterias, ¿cuántas habrá después de 10 horas?

Solución: primero halla k . Como se duplica cada 3 horas: $2 * P_0 = P_0 * e^{(k * 3)}$, o sea $2 = e^{(3k)}$. Aplica ln: $\ln(2) = 3k$, de donde $k = \ln(2) / 3 \sim 0.2310$. Ahora evalúa en $t = 10$: $P = 1,000 * e^{(0.2310 * 10)} = 1,000 * e^{2.3104} \sim 1,000 * 10.079 \sim 10,079$. Respuesta: unas 10,079 bacterias. (Atajo: en 10 horas hay $10/3 \sim 3.333$ duplicaciones, y $2^{3.333} \sim 10.079$: coincide.)

Escala de Richter. La magnitud M de un terremoto se define como $M = \log(I / I_0)$, donde I es la intensidad medida e I_0 una intensidad de referencia. Como es logaritmo base 10, cada punto de magnitud multiplica la intensidad por 10.

Ejemplo 3: Un terremoto de magnitud 6.0, ¿cuántas veces más intenso es que uno de magnitud 4.0?

Solución: sean I_6 e I_4 las intensidades. Entonces $6 = \log(I_6 / I_0)$ y $4 = \log(I_4 / I_0)$. Resta: $6 - 4 = \log(I_6 / I_0) - \log(I_4 / I_0) = \log(I_6 / I_4)$ por la propiedad del cociente. Así que $\log(I_6 / I_4) = 2$, de donde $I_6 / I_4 = 10^2 = 100$. Respuesta: el de magnitud 6 es 100 veces más intenso que el de magnitud 4.

Escala de pH. La acidez se mide con $pH = -\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno. Cada unidad de pH multiplica la acidez por 10.

Ejemplo 4: Una solución tiene $[H^+] = 2 \cdot 10^{-5}$. Calcula su pH.

Solución: $pH = -\log(2 \cdot 10^{-5}) = -(\log(2) + \log(10^{-5})) = -(0.3010 - 5) = 4.699$. Respuesta: $pH \sim 4.70$, una solución ácida (menor que 7).

Desintegración radiactiva. Los materiales radiactivos pierden la mitad de su masa cada cierto tiempo, su vida media. Si la vida media es T , la fracción que queda después de t años es $(1/2)^{(t/T)}$.

Ejemplo 5: El carbono-14 tiene una vida media de 5,730 años. Una muestra de madera antigua conserva el 25% de su carbono-14 original. ¿Qué edad tiene la muestra?

Solución: la fracción restante es 0.25, así que $(1/2)^{(t/5,730)} = 0.25$. Aplica log en ambos lados: $(t/5,730) \cdot \log(1/2) = \log(0.25)$. Despeja: $t = 5,730 \cdot \log(0.25) / \log(0.5)$. Como $\log(0.25) = \log((1/2)^2) = 2 \cdot \log(0.5)$, el cociente vale 2 y $t = 5,730 \cdot 2 = 11,460$. Respuesta: la muestra tiene unos 11,460 años. Así es como se datan los fósiles.

Errores comunes que te van a costar puntos si no los evitas:

- $\log(a + b)$ NO es $\log(a) + \log(b)$. El logaritmo convierte productos en sumas, no sumas en sumas.
- $\log(a) / \log(b)$ NO es $\log(a/b)$ ni $\log(a - b)$. Para el cociente de argumentos se restan los logaritmos: $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$.
- $\ln(2x)$ NO es $2 \cdot \ln(x)$. Es $\ln(2) + \ln(x)$ por la propiedad del producto.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 12

- Definición: $\log_b(a) = c$ significa $b^c = a$. El logaritmo es el exponente.
- $\log_b(1) = 0$, $\log_b(b) = 1$, $\log_b(b^n) = n$.
- Propiedades: $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$; $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$; $\log(x^n) = n \cdot \log(x)$.
- $\log(x)$ es base 10, $\ln(x)$ es base e ($e \sim 2.71828$).
- Cambio de base: $\log_b(a) = \log(a)/\log(b) = \ln(a)/\ln(b)$.
- En ecuaciones logarítmicas: combina en un solo logaritmo, pasa a forma exponencial y verifica que ningún argumento sea cero o negativo.
- Aplicaciones: interés compuesto, crecimiento de poblaciones, escala de Richter, pH y datación radiactiva.

12.7 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 12

1. Evalúa sin calculadora:

a) $\log_2(64)$ b) $\log_3(1/81)$ c) $\log(0.001)$ d) $\log_7(1)$

2. Convierte cada logaritmo a forma exponencial y despeja la incógnita:

a) $\log_4(x) = 2$ b) $\log_5(x) = 3$ c) $\ln(x) = -1$

3. Aplica las propiedades de los logaritmos:

a) Expande $\log_2(8 \cdot x^3)$ b) Combina $2\ln(a) + \ln(b) - 3\ln(c)$ en un solo logaritmo c) Evalúa $\log_6(36) - \log_6(6)$

4. Usa la fórmula de cambio de base:

a) Calcula $\log_3(20)$ con tres decimales (usa $\log$ o $\ln$, el que prefieras) b) Calcula $\log_5(0.5)$ con tres decimales c) Halla el valor exacto de $\log_9(27)$ usando cambio de base y simplifica

5. Resuelve las ecuaciones y verifica cada solución:

a) $\log(x) = 2$ b) $\log_4(x) = -2$ c) $\log_2(x) + \log_2(x - 6) = 4$

6. Resuelve $\ln(x) + \ln(x + 2) = \ln(15)$. Verifica tu respuesta.

7. Inviertes \$2,000 al 5% anual compuesto. ¿En cuántos años llegará a \$4,000? Da el resultado con un decimal.

8. Una solución tiene una concentración $[H^+] = 4 \cdot 10^{-6}$. Calcula su pH con dos decimales.

SOLUCIONES

1. a) $\log_2(64) = 6$ porque $2^6 = 64$.

b) $\log_3(1/81) = -4$ porque $3^{-4} = 1/81$. c) $\log(0.001) = -3$ porque $10^{-3} = 0.001$. d) $\log_7(1) = 0$ porque $7^0 = 1$.

2. a) $4^2 = x$, $x = 16$.

b) $5^3 = x$, $x = 125$. c) $e^{-1} = x$, $x = 1/e \sim 0.3679$.

3. a) $\log_2(8) + \log_2(x^3) = 3 + 3\log_2(x)$.

b) $2\ln(a) = \ln(a^2)$ y $3\ln(c) = \ln(c^3)$. Queda $\ln(a^2) + \ln(b) - \ln(c^3) = \ln((a^2 \cdot b) / c^3)$. c) $\log_6(36/6) = \log_6(6) = 1$.

4. a) $\log_3(20) = \ln(20) / \ln(3) \sim 2.9957 / 1.0986 \sim 2.727$.

b) $\log_5(0.5) = \log(0.5) / \log(5) \sim (-0.3010) / 0.6990 \sim -0.431$. c) $\log_9(27) = \ln(27) / \ln(9) = \ln(3^3) / \ln(3^2) = (3 \cdot \ln(3)) / (2 \cdot \ln(3)) = 3/2$. Comprobación: $9^{(3/2)} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$. Exacto.

5. a) $x = 10^2 = 100$. Verificación: $\log(100) = 2$. Correcto.

b) $x = 4^{(-2)} = 1/16$. Verificación: $4^{(-2)} = 1/16$. Correcto. c) Combina: $\log_2(x * (x - 6)) = 4$. Pasa a exponencial: $x * (x - 6) = 16$, o sea $x^2 - 6x - 16 = 0$, factorizada $(x - 8)(x + 2) = 0$. Candidatos: $x = 8$ y $x = -2$. Verificación: con $x = 8$, $\log_2(8) + \log_2(2) = 3 + 1 = 4$, sirve. Con $x = -2$, $\log_2(-2)$ no existe: extraña. Solución: $x = 8$.

6. Combina: $\ln(x * (x + 2)) = \ln(15)$, de donde $x * (x + 2) = 15$. Queda $x^2 + 2x - 15 = 0$, factorizada $(x + 5)(x - 3) = 0$. Candidatos: $x = 3$ y $x = -5$. Verificación: con $x = 3$, $\ln(3) + \ln(5) = \ln(15)$, sirve. Con $x = -5$, $\ln(-5)$ no existe: extraña. Solución: $x = 3$.

7. $4,000 = 2,000 * (1.05)^t$, o sea $2 = (1.05)^t$. Aplica ln: $\ln(2) = t * \ln(1.05)$. Despeja: $t = \ln(2) / \ln(1.05) \sim 0.6931 / 0.0488 \sim 14.2$. Respuesta: aproximadamente 14.2 años.

8. $\text{pH} = -\log(4 * 10^{(-6)}) = -(\log(4) + \log(10^{(-6)})) = -(0.6021 - 6) = 5.3979$. Respuesta: $\text{pH} \sim 5.40$.

CAPÍTULO 13: MATRICES Y DETERMINANTES

Las matrices son arreglos rectangulares de números que sirven para resolver sistemas de ecuaciones, organizar datos en tablas y trabajar con transformaciones. En este capítulo las vas a dominar desde cero: qué son, qué tipos existen, cómo se operan con ellas y cómo se usan para resolver sistemas usando determinantes, la regla de Cramer y la matriz inversa.

13.1 Definición de matriz

Una matriz es un conjunto de números organizados en filas (horizontales) y columnas (verticales), encerrado entre corchetes. El orden de una matriz se escribe como $m \times n$, donde m es el número de filas y n el número de columnas.

Cada elemento se identifica con dos subíndices: el primero indica la fila y el segundo la columna. El elemento a_{23} está en la segunda fila, tercera columna.

Ejemplo 1: Identifica el orden y tres elementos de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Solución: la matriz tiene 2 filas y 3 columnas, así que su orden es 2×3 . El elemento a_{11} (fila 1, columna 1) es 2. El elemento a_{23} (fila 2, columna 3) es 4. El elemento a_{12} (fila 1, columna 2) es 5.

Ejemplo 2: Construye la matriz A de orden 2×2 si cada elemento se calcula con la fórmula $a_{ij} = 2i - j$. Solución: calculamos cada elemento por separado. $a_{11} = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$ $a_{12} = 2(1) - 2 = 2 - 2 = 0$ $a_{21} = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$ $a_{22} = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2$ La matriz resultante es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3: Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y todos sus elementos correspondientes coinciden. Halla x y y para que se cumpla la igualdad: $\begin{bmatrix} x + 1 & 2 \\ y - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ Solución: igualamos los elementos que contienen letras. $x + 1 = 5$, de donde $x = 4$. $y - 2 = 7$, de donde $y = 9$. Al sustituir, ambas matrices quedan exactamente iguales.

13.2 Tipos de matrices

Hay varias familias de matrices que debes reconocer de un vistazo. Las más importantes son:

Matriz cuadrada: tiene el mismo número de filas que de columnas (orden $n \times n$). Matriz fila: tiene una sola fila (orden $1 \times n$). Matriz columna: tiene una sola columna (orden $m \times 1$). Matriz nula: todos sus elementos son cero. Matriz diagonal: es cuadrada y todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero. Matriz identidad (I): es diagonal con unos en la diagonal principal. Funciona como el 1 de las matrices. Matriz triangular superior: es cuadrada y todos

los elementos debajo de la diagonal principal son cero. Matriz simétrica: es cuadrada y coincide con su transpuesta, es decir $a_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplo 1: Clasifica estas matrices. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Solución: A es la matriz identidad de orden 2×2 , porque es diagonal con unos en la diagonal. B es la matriz nula de orden 2×3 , porque todos sus elementos son cero. C es una matriz diagonal de orden 3×3 , porque solo tiene valores en la diagonal principal.

Ejemplo 2: Determina si las siguientes matrices son triangular superior o simétrica. $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ Solución: P es triangular superior: es cuadrada 3×3 y debajo de la diagonal principal solo hay ceros. Q es simétrica: es cuadrada y cada elemento coincide con su reflejo respecto a la diagonal. Por ejemplo $a_{12} = 5$ y $a_{21} = 5$; $a_{13} = 1$ y $a_{31} = 1$; $a_{23} = 4$ y $a_{32} = 4$.

Ejemplo 3: Escribe la matriz identidad de orden 3×3 y una matriz columna de orden 3×1 . Solución: La identidad I3 tiene unos en la diagonal y ceros en el resto: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Una matriz columna 3×1 puede ser cualquier columna de tres números, por ejemplo: $\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

13.3 Operaciones con matrices

Suma y resta: solo se pueden sumar o restar matrices del mismo orden, y se hace elemento por elemento. Multiplicación por un escalar: se multiplica cada elemento de la matriz por ese número. Multiplicación de matrices: para multiplicar A por B, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B. El elemento c_{ij} del resultado se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B, elemento por elemento, y sumando. Ojo: en general $A \times B$ no es igual a $B \times A$. El orden sí importa.

Ejemplo 1: Si A y B son: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ calcula $A + B$ y $A - B$. Solución: $A + B$: sumamos elemento por elemento. $\begin{bmatrix} 2 + 4 & 5 + (-1) \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 + 0 & 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A - B$: restamos elemento por elemento. $\begin{bmatrix} 2 - 4 & 5 - (-1) \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0 & 3 - 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2: Calcula $-2A$ con la matriz A del ejemplo anterior. Solución: multiplicamos cada elemento de A por -2. $-2A = \begin{bmatrix} -2(2) & -2(5) \\ -4 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(1) & -2(3) \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3: Multiplica $A (2 \times 3)$ por $B (3 \times 2)$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ Solución: como A tiene 3 columnas y B tiene 3 filas, el producto existe y será de orden 2×2 . $c_{11} = (1)(7) + (2)(9) + (3)(11) = 7 + 18 + 33 = 58$ $c_{12} = (1)(8) + (2)(10) + (3)(12) = 8 + 20 + 36 = 64$ $c_{21} = (4)(7) + (5)(9) + (6)(11) = 28 + 45 + 66 = 139$ $c_{22} = (4)(8) + (5)(10) + (6)(12) = 32 + 50 + 72 = 154$ El resultado es: $\begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$

Ejemplo 4: Comprueba que en general $A \times B$ es distinto de $B \times A$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Solución: $A \times B = \begin{bmatrix} (1)(0) + (2)(1) & (1)(1) + (2)(0) \\ (3)(0) + (4)(1) & (3)(1) + (4)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $B \times A = \begin{bmatrix} (0)(1) + (1)(3) & (0)(2) + (1)(4) \\ (1)(1) + (0)(3) & (1)(2) + (0)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ Como ves, $A \times B$ no es igual a $B \times A$. La multiplicación de matrices no es conmutativa.

13.4 Determinante de una matriz

El determinante es un número asociado a cada matriz cuadrada. Se escribe con barras verticales en lugar de corchetes. Sirve para saber si un sistema tiene solución única y para calcular inversas.

Para una matriz 2×2 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$ Se multiplica la diagonal principal y se resta el producto de la diagonal secundaria.

Para una matriz 3×3 se usa la regla de Sarrus: se repiten las dos primeras columnas a la derecha, se suman los tres productos de las diagonales principales y se restan los tres productos de las diagonales secundarias.

Propiedades útiles: el determinante de una matriz triangular es el producto de su diagonal principal. Si el determinante es cero, la matriz se llama singular y no tiene inversa.

Ejemplo 1: Calcula el determinante de: $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ Solución: $(4)(5) - (3)(2) = 20 - 6 = 14$.

Ejemplo 2: Calcula el determinante de: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ Solución: $(2)(1) - (7)(3) = 2 - 21 = -19$.

Ejemplo 3: Calcula por Sarrus el determinante de: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ Solución: repetimos las dos primeras columnas a la derecha. Diagonales principales: $(2)(4)(0) = 0$ $(1)(5)(1) = 5$ $(3)(0)(2) = 0$ Suma de principales = $0 + 5 + 0 = 5$. Diagonales secundarias: $(3)(4)(1) = 12$ $(1)(0)(0) = 0$ $(2)(5)(2) = 20$ Suma de secundarias = $12 + 0 + 20 = 32$. Determinante = $5 - 32 = -27$.

Ejemplo 4: Calcula el determinante de esta matriz triangular y el de esta otra matriz: $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ Solución: La primera es triangular superior, así que su determinante es el producto de la diagonal: $(3)(-1)(4) = -12$. La segunda: $(2)(2) - (4)(1) = 4 - 4 = 0$. Como el determinante es cero, esta matriz es singular: no tiene inversa.

13.5 Regla de Cramer

La regla de Cramer resuelve un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando determinantes, siempre que el determinante del sistema (D) sea distinto de cero. Para un sistema 2×2 : $a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$ se calculan: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (se sustituye la columna de x por los términos independientes) $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (se sustituye la columna de y por los términos independientes) y la solución es $x = D_x / D$, $y = D_y / D$. Para un sistema 3×3 la idea es la misma: D es el determinante de los coeficientes, D_x , D_y , D_z se forman sustituyendo la columna correspondiente por los términos independientes.

Ejemplo 1: Resuelve por Cramer: $2x + 3y = 7$ $x - y = 1$ Solución: $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (3)(1) = -2 - 3 = -5$ $D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (7)(-1) - (3)(1) = -7 - 3 = -10$ $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (7)(1) = 2 - 7 = -5$ $x = D_x / D = (-10) / (-5) = 2$ $y = D_y / D = (-5) / (-5) = 1$ Comprobación: $2(2) + 3(1) = 7$ y $2 - 1 = 1$. Correcto.

Ejemplo 2: Resuelve por Cramer: $x + 2y + z = 4$ $2x - y + 3z = 3$ $x + y - z = 0$ Solución: primero el determinante del sistema. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ Principales: $(1)(-1)(-1) = 1$; $(2)(3)(1) = 6$; $(1)(2)(1) = 2$. Suma = 9. Secundarias: $(1)(-1)(1) = -1$; $(2)(2)(-1) = -4$; $(1)(3)(1) = 3$. Suma = -2. $D = 9 - (-2) = 11$. D_x (columna 1 por los términos independientes 4, 3, 0): $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ Principales: $(4)(-1)(-1) = 4$; $(2)(3)(0) = 0$; $(1)(3)(1) = 3$. Suma = 7. Secundarias: $(1)(-1)(0) = 0$; $(2)(3)(-1) = -6$; $(4)(3)(1) = 12$. Suma = 6. $D_x = 7 - 6 = 1$, así que $x = 1 / 11$. D_y (columna 2 por 4, 3, 0): $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Principales: $(1)(3)(-1) = -3$; $(4)(3)(1) = 12$; $(1)(2)(0) = 0$. Suma = 9. Secundarias: $(1)(3)(1) = 3$; $(4)(2)(-1) = -8$; $(1)(3)(0) = 0$. Suma = -5. $D_y = 9 - (-5) = 14$, así que $y = 14 / 11$. D_z (columna 3 por 4, 3, 0): $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Principales: $(1)(-1)(0) = 0$; $(2)(3)(1) = 6$; $(4)(2)(1) = 8$. Suma = 14. Secundarias: $(4)(-1)(1) = -4$; $(2)(2)(0) = 0$; $(1)(3)(1) = 3$. Suma = -1. $D_z = 14 - (-1) = 15$, así que $z = 15 / 11$. Comprobación rápida en la tercera ecuación: $(1 + 14 - 15) / 11 = 0$. Correcto.

Ejemplo 3: Resuelve por Cramer: $2x + y - z = 8$ $-3x - y + 2z = -11$ $-2x + y + 2z = -3$ Solución: $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Principales: $(2)(-1)(2) = -4$; $(1)(2)(-2) = -4$; $(-1)(-3)(1) = 3$. Suma = -5. Secundarias: $(-1)(-1)(-2) = -2$; $(1)(-3)(2) = -6$; $(2)(2)(1) = 4$. Suma = -4. $D = -5 - (-4) = -1$. $D_x = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ -11 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Principales: $(8)(-1)(2) = -16$; $(1)(2)(-3) = -6$; $(-1)(-11)(1) = 11$. Suma = -11. Secundarias: $(-1)(-1)(-3) = -3$; $(1)(-11)(2) = -22$; $(8)(2)(1) = 16$. Suma = -9. $D_x = -11 - (-9) = -2$, así que $x = (-2) / (-1) = 2$. $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -3 & -11 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ Principales: $(2)(-11)(2) = -44$; $(8)(2)(-2) = -32$; $(-1)(-3)(-3) = -9$. Suma = -85. Secundarias: $(-1)(-11)(-2) = -22$; $(8)(-3)(2) = -48$; $(2)(2)(-3) = -12$. Suma = -82. $D_y = -85 - (-82) = -3$, así que $y = (-3) / (-1) = 3$. $D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -3 & -1 & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ Principales: $(2)(-1)(-3) = 6$; $(1)(-11)(-2) = 22$; $(8)(-3)(1) = -24$. Suma = 4. Secundarias: $(8)(-1)(-2) = 16$; $(1)(-3)(-3) = 9$; $(2)(-11)(1) = -22$. Suma = 3. $D_z = 4 - 3$

= 1, así que $z = 1 / (-1) = -1$. Comprobación en la primera ecuación: $2(2) + 3 - (-1) = 4 + 3 + 1 = 8$. Correcto.

13.6 Inversa de una matriz

La inversa de una matriz cuadrada A , escrita A^{-1} , es la matriz que cumple $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$ (la identidad). Solo existe si el determinante de A es distinto de cero.

Para una matriz 2×2 : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, su inversa es $A^{-1} = (1 / \det) \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Fíjate: se intercambian los elementos de la diagonal principal y se cambia el signo de los otros dos.

Para una matriz 3×3 se usa la matriz adjunta: $A^{-1} = (1 / \det) \times \text{adj}(A)$, donde $\text{adj}(A)$ es la transpuesta de la matriz de cofactores.

Ejemplo 1: Halla la inversa de A y verifica el resultado. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ Solución: $\det(A) = (4)(6) - (7)(2) = 24 - 14 = 10$. $A^{-1} = (1 / 10) \times \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ Verificación: multiplicamos $A \times A^{-1}$ y debe dar la identidad. $A \times A^{-1} = (1 / 10) \times \begin{bmatrix} (4)(6) + (7)(-2) & (4)(-7) + (7)(4) \\ (2)(6) + (6)(-2) & (2)(-7) + (6)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Queda la identidad, así que la inversa está bien calculada.

Ejemplo 2: Halla la inversa de esta matriz 3×3 . $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ Solución: primero el determinante por Sarrus. Principales: $(1)(1)(0) = 0$; $(2)(4)(5) = 40$; $(3)(0)(6) = 0$. Suma = 40. Secundarias: $(3)(1)(5) = 15$; $(2)(0)(0) = 0$; $(1)(4)(6) = 24$. Suma = 39. $\det(A) = 40 - 39 = 1$. Como es distinto de cero, la inversa existe. Calculamos los cofactores $C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \times$ menor: Fila 1: $C_{11} = +(1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) = -24$; $C_{12} = -(0 \cdot 0 - 4 \cdot 5) = 20$; $C_{13} = +(0 \cdot 6 - 1 \cdot 5) = -5$. Fila 2: $C_{21} = -(2 \cdot 0 - 3 \cdot 6) = 18$; $C_{22} = +(1 \cdot 0 - 3 \cdot 5) = -15$; $C_{23} = -(1 \cdot 6 - 2 \cdot 5) = 4$. Fila 3: $C_{31} = +(2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = 5$; $C_{32} = -(1 \cdot 4 - 3 \cdot 0) = -4$; $C_{33} = +(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 1$. La adjunta es la transpuesta de los cofactores: $\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Como $\det = 1$, la inversa es la adjunta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Verificación rápida con la primera fila de A por la primera columna de A^{-1} : $(1)(-24) + (2)(20) + (3)(-5) = -24 + 40 - 15 = 1$. Da 1 en la diagonal, como debe ser.

Ejemplo 3: Determina si existe la inversa de: $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ Solución: $\det = (2)(2) - (4)(1) = 4 - 4 = 0$. El determinante es cero, así que la matriz es singular y no tiene inversa. Recuerda: sin determinante distinto de cero no hay inversa.

13.7 Sistemas con matrices

Todo sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en forma matricial como $A \times X = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X la columna de incógnitas y B la columna de términos independientes. Si A tiene inversa, la solución es directa: $X = A^{-1} \times B$.

Ejemplo 1: Resuelve el sistema usando la matriz inversa. $3x + 2y = 12$ $x + y = 5$ Solución: escribimos $A \times X = B$. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\det(A) = (3)(1) - (2)(1) = 1$. $A^{-1} = (1/1) \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $X = A^{-1} \times B = \begin{bmatrix} (1)(12) + (-2)(5) \\ (-1)(12) + (3)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -12 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ Así que $x = 2$, $y = 3$. Comprobación: $3(2) + 2(3) = 12$ y $2 + 3 = 5$. Correcto.

Ejemplo 2: Resuelve el sistema usando la matriz inversa. $x + 2y = 9$ $3x + 5y = 22$ Solución: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\det(A) = (1)(5) - (2)(3) = 5 - 6 = -1$. $A^{-1} = (1/-1) \times \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $X = A^{-1} \times B = \begin{bmatrix} (-5)(9) + (2)(22) \\ (3)(9) + (-1)(22) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 + 44 \\ 27 - 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ Así que $x = -1$, $y = 5$. Comprobación: $-1 + 2(5) = 9$ y $3(-1) + 5(5) = 22$. Correcto.

13.8 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 13

- Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ a) ¿Cuál es su orden? b) ¿Cuánto vale el elemento m_{23} ? c) ¿Cuánto vale $m_{11} + m_{22}$?
- Si $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, halla los valores de x y y para que $A = B$.
- Con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, calcula:
a) $A + B$ b) $A - B$ c) $2A$
- Con $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, calcula:
a) $P \times Q$ b) $Q \times P$ c) ¿Se cumple que $P \times Q = Q \times P$?
- Calcula los determinantes:
a) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
- Resuelve por la regla de Cramer:
 $3x - 2y = 5$ $2x + y = 12$
- Resuelve por la regla de Cramer:
 $x + y + z = 6$ $2x - y + z = 3$ $x + 2y - z = 2$
- a) Halla la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y verifícala multiplicando $A \times A^{-1}$.

b) Usa esa inversa para resolver el sistema: $2x + 3y = 13$; $x + 4y = 18$.

SOLUCIONES

1. a) La matriz tiene 2 filas y 3 columnas: orden 2×3 .

b) m_{23} está en la fila 2, columna 3: vale 1. c) $m_{11} = 3$ y $m_{22} = 4$, así que $m_{11} + m_{22} = 7$.

2. Igualamos elemento por elemento: $x = 4$ y $y = 5$.

3. a) $A + B =$

$$\begin{bmatrix} 1+5 & 0+(-1) & -2+3 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+0 & 4+2 & 1+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ b) } A - B = \begin{bmatrix} 1-5 & 0-(-1) & -2-3 \\ -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3-0 & 4-2 & 1-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ c) } 2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

4. a) $P \times Q$:

$c_{11} = (2)(4) + (1)(2) = 10$; $c_{12} = (2)(-1) + (1)(5) = 3$ $c_{21} = (0)(4) + (3)(2) = 6$; $c_{22} = (0)(-1) + (3)(5) = 15$ $P \times Q = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$ b) $Q \times P$: $c_{11} = (4)(2) + (-1)(0) = 8$; $c_{12} = (4)(1) + (-1)(3) = 1$ $c_{21} = (2)(2) + (5)(0) = 4$; $c_{22} = (2)(1) + (5)(3) = 17$ $Q \times P = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$ c) No, $P \times Q$ es distinto de $Q \times P$. La multiplicación no es conmutativa.

5. a) $(5)(4) - (-2)(3) = 20 + 6 = 26$.

b) Por Sarrus: Principales: $(1)(-1)(0) = 0$; $(0)(4)(2) = 0$; $(2)(3)(5) = 30$. Suma = 30. Secundarias: $(2)(-1)(2) = -4$; $(0)(3)(0) = 0$; $(1)(4)(5) = 20$. Suma = 16. Determinante = $30 - 16 = 14$.

6. $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (-2)(2) = 3 + 4 = 7$.

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = (5)(1) - (-2)(12) = 5 + 24 = 29$. $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = (3)(12) - (5)(2) = 36 - 10 = 26$. $x = 29 / 7$, $y = 26 / 7$. Comprobación: $3(29/7) - 2(26/7) = (87 - 52) / 7 = 5$. Correcto.

7. $D =$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ Principales: $(1)(-1)(-1) = 1$; $(1)(1)(1) = 1$; $(1)(2)(2) = 4$. Suma = 6. Secundarias: $(1)(-1)(1) = -1$; $(1)(2)(-1) = -2$; $(1)(1)(2) = 2$. Suma = -1. $D = 6 - (-1) = 7$. $D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ Principales: $(6)(-1)(-1) = 6$; $(1)(1)(2) = 2$; $(1)(3)(2) = 6$. Suma = 14. Secundarias: $(1)(-1)(2) = -2$; $(1)(3)(-1) = -3$; $(6)(1)(2) = 12$. Suma = 7. $D_x = 14 - 7 = 7$, así que $x = 7 / 7 = 1$. $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ Principales: $(1)(3)(-1) = -3$; $(6)(1)(1) = 6$; $(1)(2)(2) = 4$. Suma = 7. Secundarias: $(1)(3)(1) = 3$; $(6)(2)(-1) = -12$; $(1)(1)(2) = 2$. Suma = -7. $D_y = 7 - (-7) = 14$, así que $y = 14 / 7 = 2$. $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ Principales: $(1)(-1)(2) = -2$; $(1)(3)(1) = 3$; $(6)(2)(2) = 24$. Suma = 25. Secundarias: $(6)(-1)(1) = -6$; $(1)(2)(2) = 4$; $(1)(3)(2) = 6$. Suma = 4. $D_z = 25 - 4 = 21$, así que $z = 21 / 7 = 3$. Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Comprobación: $1 + 2 + 3 = 6$. Correcto.

8. a) $\det(A) = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$.

$A^{-1} = (1/5) \times \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Verificación: $A \times A^{-1} = (1/5) \times \begin{bmatrix} (2)(4) + (3)(-1) & (2)(-3) + (3)(2) \\ (1)(4) + (4)(-1) & (1)(-3) + (4)(2) \end{bmatrix} = (1/5) \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = I$. b) $X = A^{-1} \times B = (1/5) \times \begin{bmatrix} (4)(13) + (-3)(18) \\ (-1)(13) + (2)(18) \end{bmatrix} = (1/5) \times \begin{bmatrix} 52 - 54 \\ -13 + 36 \end{bmatrix} = (1/5) \times \begin{bmatrix} -2 \\ 23 \end{bmatrix}$. $x = -2/5$, $y = 23/5$. Comprobación: $2(-2/5) + 3(23/5) = (-4 + 69)/5 = 13$. Correcto.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 13

- Una matriz es un arreglo de números en filas y columnas; su orden $m \times n$ y cada elemento a_{ij} (fila i , columna j) te dicen exactamente dónde está cada número.
- Suma y resta solo valen entre matrices del mismo orden, elemento por elemento; multiplicar por un escalar multiplica cada elemento.
- Para multiplicar matrices, las columnas de la primera deben igualar las filas de la segunda; y en general $A \times B$ no es igual a $B \times A$: el orden sí importa.
- El determinante es un número asociado a cada matriz cuadrada: en 2×2 es $ad - bc$ y en 3×3 se calcula con la regla de Sarrus; si vale cero, la matriz es singular y no tiene inversa.
- La regla de Cramer resuelve un sistema con $x = Dx/D$, $y = Dy/D$, siempre que el determinante D sea distinto de cero.
- La inversa A^{-1} cumple $A \times A^{-1} = I$; con ella resuelves un sistema $AX = B$ como $X = A^{-1} \times B$.

CAPÍTULO 14: PROGRESIONES Y SUCESIONES

Muchos fenómenos avanzan siguiendo un patrón: tus ahorros mes a mes, una población de bacterias, el interés de una deuda. Las sucesiones y progresiones te dan las fórmulas para describir esos patrones, predecir el término que quieras y sumar montones de términos sin hacer la suma uno por uno.

14.1 Sucesiones numéricas

Una sucesión es una lista ordenada de números: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Cada número ocupa una posición. El término general a_n es la fórmula que te da el valor del término según su posición n .

Para encontrar los primeros términos, sustituyes $n = 1, 2, 3, \dots$ en el término general. También hay sucesiones definidas por recurrencia: te dan el primer término y una regla para obtener cada término a partir del anterior.

Error típico: empezar a contar desde $n = 0$ cuando el problema usa $n = 1$. Si te piden el "primer término", casi siempre es a_1 , no a_0 . Lee con cuidado: en $a_n = 2n + 1$ el primer término es $a_1 = 3$, no $a_0 = 1$. Ese descuido de una posición arruina todo el ejercicio.

Una sucesión famosa que debes conocer es la de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Cada término es la suma de los dos anteriores, así que se define por recurrencia como $a_1 = 1, a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Aparece en la naturaleza (los pétalos de las flores, las piñas, los girasoles) y no es ni aritmética ni geométrica: es su propia familia.

Las sucesiones pueden ser finitas (tienen último término, como las calificaciones de tus 6 materias) o infinitas (siguen para siempre, como los números pares). En este capítulo trabajamos sobre todo con infinitas, porque las fórmulas del término n -ésimo valen para cualquier n .

Ejemplo 1: Escribe los primeros cuatro términos de la sucesión con término general $a_n = 2n + 1$. Solución: sustituimos $n = 1, 2, 3, 4$. $a_1 = 2(1) + 1 = 3$ $a_2 = 2(2) + 1 = 5$ $a_3 = 2(3) + 1 = 7$ $a_4 = 2(4) + 1 = 9$ La sucesión empieza: 3, 5, 7, 9, ...

Ejemplo 2: Escribe los primeros cinco términos de $a_n = n^2$. Solución: $a_1 = 1^2 = 1$ $a_2 = 2^2 = 4$ $a_3 = 3^2 = 9$ $a_4 = 4^2 = 16$ $a_5 = 5^2 = 25$ La sucesión es: 1, 4, 9, 16, 25, ...

Ejemplo 3: Una sucesión se define por recurrencia: $a_1 = 2$ y $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 1$. Calcula los primeros cuatro términos. Solución: cada término se obtiene del anterior. $a_1 = 2$ $a_2 = 3(2) + 1 = 7$ $a_3 = 3(7) + 1 = 22$ $a_4 = 3(22) + 1 = 67$ La sucesión es: 2, 7, 22, 67, ...

Ejemplo 4: Escribe los primeros cinco términos de $a_n = (-1)^n \cdot n$. Solución: $a_1 = (-1)^1 \cdot 1 = -1$ $a_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$ $a_3 = (-1)^3 \cdot 3 = -3$ $a_4 = (-1)^4 \cdot 4 = 4$ $a_5 = (-1)^5 \cdot 5 = -5$ La sucesión es: -1, 2, -3, 4, -5, ... Fíjate cómo el signo alterna en cada término.

Nota: a veces te dan los primeros términos y te piden deducir el término general. Busca el patrón comparando cada término con su posición. Por ejemplo, en 2, 5, 10, 17, 26, ... cada término es uno más que un cuadrado perfecto: $1^2 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$, $3^2 + 1 = 10$, $4^2 + 1 = 17$, $5^2 + 1 = 26$. Así que el término general es $a_n = n^2 + 1$. Compruébalo con $n = 3$: $3^2 + 1 = 10$, que es el tercer término. Correcto.

14.2 Progresión aritmética

Una progresión aritmética (P.A.) es una sucesión donde cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad fija llamada diferencia (d). Es decir: $a_{n+1} = a_n + d$.

El término n-ésimo se calcula con la fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$. Si conoces dos términos a_m y a_k , la diferencia es $d = (a_m - a_k) / (m - k)$. Interpolar medios aritméticos entre dos números significa meter términos entre ellos para formar una P.A. completa: si metes k medios entre a y b, la diferencia es $d = (b - a) / (k + 1)$.

El signo de d te dice hacia dónde va la progresión: si d es positiva, los términos crecen; si es negativa, decrecen; si es cero, todos los términos son iguales y la progresión es constante. Por ejemplo, 20, 17, 14, 11, ... tiene $d = -3$ y va bajando de 3 en 3.

Ejemplo 1: Para la P.A. con término general $a_n = 4n - 3$, escribe los primeros cuatro términos, halla la diferencia y determina si 101 pertenece a la progresión. Solución: $a_1 = 4(1) - 3 = 1$ $a_2 = 4(2) - 3 = 5$ $a_3 = 4(3) - 3 = 9$ $a_4 = 4(4) - 3 = 13$ La diferencia es $d = 5 - 1 = 4$ (cada término aumenta 4). Para saber si 101 está en la progresión: $4n - 3 = 101$, de donde $4n = 104$ y $n = 26$. Como n es un número entero positivo, 101 sí pertenece y es el término 26.

Ejemplo 2: Halla el término 20 de la P.A. con $a_1 = 7$ y $d = 5$. Solución: aplicamos la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$. $a_{20} = 7 + (20 - 1)(5) = 7 + (19)(5) = 7 + 95 = 102$.

Ejemplo 3: Interpola 4 medios aritméticos entre 10 y 40. Solución: al meter 4 medios entre 10 y 40 se forman 5 intervalos iguales. $d = (40 - 10) / (4 + 1) = 30 / 5 = 6$. Los términos son: 10, $10 + 6 = 16$, $16 + 6 = 22$, $22 + 6 = 28$, $28 + 6 = 34$, $34 + 6 = 40$. La progresión completa: 10, 16, 22, 28, 34, 40.

Ejemplo 4: En una P.A. se sabe que $a_5 = 14$ y $a_{12} = 35$. Halla la diferencia y el primer término. Solución: la diferencia es $d = (a_{12} - a_5) / (12 - 5) = (35 - 14) / 7 = 21 / 7 = 3$. Para el primer término usamos $a_5 = a_1 + 4d$: $14 = a_1 + 4(3)$, de donde $a_1 = 14 - 12 = 2$. Comprobación: $a_{12} = 2 + 11(3) = 2 + 33 = 35$. Correcto.

Propiedad del término medio: en toda progresión aritmética, cada término (excepto el primero) es el promedio de sus dos vecinos. Es decir: $2 \cdot a_2 = a_1 + a_3$, o lo que es lo mismo, $a_2 = (a_1 + a_3) / 2$. Compruébalo con 4, 7, 10: $(4 + 10) / 2 = 14 / 2 = 7$, que es el término del medio. Esta propiedad te sirve para verificar si tres números forman una P.A.: por ejemplo, ¿8, 15, 22 están en progresión aritmética? $(8 + 22) / 2 = 30 / 2 = 15$. Sí, porque el del medio es el promedio de los extremos.

De esa propiedad sale un truco útil: en una P.A., los términos equidistantes de los extremos siempre suman lo mismo. En 2, 5, 8, 11, 14: el primero más el último da $2 + 14 = 16$, el segundo más el penúltimo da $5 + 11 = 16$, y el del centro es 8, justo la mitad de 16. Esta es la idea que usó Gauss para sumar del 1 al 100 sin hacer 99 sumas: emparejó $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ... cada pareja suma 101 y hay 50 parejas, así que el total es $50 \cdot 101 = 5050$.

14.3 Progresión geométrica

Una progresión geométrica (P.G.) es una sucesión donde cada término se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad fija llamada razón (r). Es decir: $a_{n+1} = a_n \cdot r$.

El término n -ésimo se calcula con la fórmula: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$. Para interpolar k medios geométricos entre a y b , la razón cumple $r^{(k+1)} = b / a$. Ojo: si la razón es mayor que 1, los términos crecen rapidísimo; si está entre 0 y 1, decrecen.

La razón también puede ser negativa, y entonces los términos alternan de signo: con $a_1 = 2$ y $r = -3$ obtienes 2, -6, 18, -54, ... Y si $r = 1$, todos los términos son iguales: 5, 5, 5, 5, ... es una progresión geométrica (y también aritmética con $d = 0$).

Ejemplo 1: Escribe los primeros cuatro términos de $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$ e identifica la razón. Solución: $a_1 = 3 \cdot 2^0 = 3$ $a_2 = 3 \cdot 2^1 = 6$ $a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$ $a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$ La sucesión es 3, 6, 12, 24, ... y la razón es $r = 6 / 3 = 2$.

Ejemplo 2: Halla el término 8 de la P.G. con $a_1 = 5$ y $r = 3$. Solución: $a_8 = a_1 \cdot r^7 = 5 \cdot 3^7$. $3^7 = 2187$, así que $a_8 = 5 \cdot 2187 = 10935$.

Ejemplo 3: Interpola 3 medios geométricos entre 2 y 162. Solución: al meter 3 medios se forman 4 intervalos, así que $r^4 = 162 / 2 = 81$. $r = 3$ (tomamos la raíz positiva). Los términos: $2, 2 \cdot 3 = 6, 6 \cdot 3 = 18, 18 \cdot 3 = 54, 54 \cdot 3 = 162$. La progresión completa: 2, 6, 18, 54, 162.

Ejemplo 4: En una P.G. se sabe que $b_2 = 18$ y $b_5 = 486$. Halla la razón, el primer término y el término general. Solución: $b_5 = b_2 \cdot r^3$, así que $r^3 = 486 / 18 = 27$ y $r = 3$. $b_2 = b_1 \cdot r$, así que $18 = b_1 \cdot 3$ y $b_1 = 6$. El término general es $b_n = 6 \cdot 3^{(n-1)}$. Comprobación: $b_5 = 6 \cdot 3^4 = 6 \cdot 81 = 486$. Correcto.

Propiedad de la media geométrica: en toda progresión geométrica, cada término (excepto el primero) cumple que su cuadrado es el producto de sus dos vecinos: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Compruébalo con 1, 4, 16: $4^2 = 16$ y $(1)(16) = 16$. Coinciden. Te sirve para verificar si tres números forman una P.G.: ¿3, 12, 48 están en progresión geométrica? $12^2 = 144$ y $(3)(48) = 144$. Sí, porque el cuadrado del término medio es igual al producto de los extremos.

Con razón fraccionaria menor que 1, la progresión decrece hacia cero sin llegar nunca: 81, 27, 9, 3, 1, $1/3$, ... tiene $r = 1/3$, porque cada término es la tercera parte del anterior ($27 = 81 / 3$, $9 = 27 / 3$, y así sigue). Este tipo de progresión es la que aparece en la suma infinita de la sección 14.4.

14.4 Suma de términos

Sumar término por término es lento cuando son muchos. Estas fórmulas te ahorran el trabajo.

Suma de los n primeros términos de una P.A.: $S_n = n / 2 \cdot (a_1 + a_n)$ o también $S_n = n / 2 \cdot [2a_1 + (n - 1) \cdot d]$. El caso más famoso: la suma de los primeros n números naturales es $n(n + 1) / 2$.

Suma de los n primeros términos de una P.G. (con r distinto de 1): $S_n = a_1 \cdot (r^n - 1) / (r - 1)$.

Las dos fórmulas de la P.A. son equivalentes: usa la primera si ya conoces el último término, y la segunda si conoces la diferencia. Con la práctica vas a preferir $S_n = n/2 \cdot (a_1 + a_n)$ porque es más corta, pero necesitas calcular a_n primero.

Para no confundir las fórmulas, recuerda su lógica: la suma aritmética es "número de términos por el promedio del primero y el último", y la suma geométrica crece con potencias de la razón. Si tu resultado de una P.G. con $r > 1$ sale más chico que el último término, algo hiciste mal: la suma siempre supera al término más grande.

Ejemplo 1: Calcula la suma de los 20 primeros términos de la P.A. con $a_1 = 7$ y $d = 5$. Solución: usamos $S_n = n / 2 \cdot [2a_1 + (n - 1) \cdot d]$. $S_{20} = 20 / 2 \cdot [2(7) + (19)(5)] = 10 \cdot [14 + 95] = 10 \cdot 109 = 1090$. Verificación con la otra fórmula: $a_{20} = 7 + 19(5) = 102$; $S_{20} = 20 / 2 \cdot (7 + 102) = 10 \cdot 109 = 1090$. Coincide.

Ejemplo 2: Calcula la suma de los primeros 100 números naturales. Solución: es una P.A. con $a_1 = 1$ y $d = 1$. $S_{100} = 100 \cdot 101 / 2 = 50 \cdot 101 = 5050$. Este es el famoso resultado que Gauss calculó de niño en segundos.

Ejemplo 3: Calcula la suma de los 10 primeros términos de la P.G. con $a_1 = 3$ y $r = 2$. Solución: $S_n = a_1 \cdot (r^n - 1) / (r - 1)$. $S_{10} = 3 \cdot (2^{10} - 1) / (2 - 1) = 3 \cdot (1,024 - 1) = 3 \cdot 1,023 = 3069$.

Ejemplo 4: Calcula la suma de los 6 primeros términos de la P.G. 64, 32, 16, ... Solución: $a_1 = 64$ y $r = 32 / 64 = 1/2$. $S_6 = 64 \cdot [1 - (1/2)^6] / (1 - 1/2) = 64 \cdot (1 - 1/64) / (1/2) = 64 \cdot (63/64) \cdot 2 = 126$. Verificación directa: $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 126$. Coincide.

Suma infinita: si la razón de una P.G. cumple $|r| < 1$, los términos se hacen cada vez más pequeños y la suma de infinitos términos converge a un valor finito: $S = a_1 / (1 - r)$. Por ejemplo, la suma $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ vale $S = 1 / (1 - 1/2) = 1 / (1/2) = 2$. Tiene sentido: las sumas parciales son 1, 1.5, 1.75, 1.875, ... y se acercan a 2 sin pasarse nunca. Error típico que debes evitar: la fórmula $S_n = a_1(r^n - 1)/(r - 1)$ no sirve cuando $r = 1$, porque el denominador se hace cero. Pero si $r = 1$, todos los términos son iguales a a_1 y la suma es simplemente $S_n = n \cdot a_1$.

14.5 Aplicaciones

Las progresiones aparecen en la vida real cada vez que algo crece o decrece siguiendo un patrón fijo. Aquí van casos típicos.

El interés compuesto es una progresión geométrica: si inviertes un capital C a una tasa i por periodo, el monto después de n periodos es $M = C \cdot (1 + i)^n$. La depreciación también es geométrica: un objeto que pierde cada año un porcentaje p de su valor vale $V = V_0 \cdot (1 - p)^n$ después de n años. El crecimiento de poblaciones con duplicación constante es geométrico, y un ahorro con aumentos fijos es aritmético.

Antes de lanzarte a calcular, identifica el patrón con esta pregunta: ¿el cambio de un periodo al siguiente es siempre la misma suma o siempre la misma multiplicación? Si dudas, divide dos términos consecutivos: si el cociente se repite, es geométrica. Si al restarlos la diferencia se repite, es aritmética.

Ejemplo 1: Inviertes 1,000 pesos al 5% anual con interés compuesto. ¿Cuánto tendrás después de 3 años? Solución: es una P.G. con primer factor 1,000 y razón 1.05. $M = 1,000 \cdot (1.05)^3 = 1,000 \cdot 1.157625 = 1,157.63$ pesos. Cálculo paso a paso: $(1.05)^2 = 1.1025$; $(1.1025)(1.05) = 1.157625$. Ganaste 157.63 pesos de interés en 3 años.

Ejemplo 2: Una máquina que costó 80,000 pesos pierde el 10% de su valor cada año. ¿Cuánto valdrá después de 4 años? Solución: cada año conserva el 90% del valor anterior, así que es una P.G. con razón 0.9. $V = 80,000 \cdot (0.9)^4 = 80,000 \cdot 0.6561 = 52,488$ pesos. Cálculo: $(0.9)^2 = 0.81$; $(0.81)^2 = 0.6561$. La máquina perdió casi la tercera parte de su valor.

Ejemplo 3: Un cultivo empieza con 500 bacterias que se duplican cada hora. ¿Cuántas habrá después de 6 horas? Solución: es una P.G. con $a_1 = 500$ y $r = 2$. $N = 500 \cdot 2^6 = 500 \cdot 64 = 32,000$ bacterias. Fíjate en la velocidad: en solo 6 horas pasó de 500 a 32000. Así crecen las cosas con razón mayor que 1.

Ejemplo 4: Ahorras 50 pesos la primera semana y cada semana aumentas 20 pesos respecto a la anterior. ¿Cuánto ahorras en la semana 12 y cuánto juntaste en total? Solución: es una P.A. con $a_1 = 50$ y $d = 20$. En la semana 12: $a_{12} = 50 + (11)(20) = 50 + 220 = 270$ pesos. Total en 12 semanas: $S_{12} = 12 / 2 \cdot (50 + 270) = 6 \cdot 320 = 1,920$ pesos. Con aumentos fijos y constantes, en 3 meses juntaste 1,920 pesos.

Cómo decidir qué progresión usar: pregúntate si el cambio es una suma fija o una multiplicación fija. Si cada periodo se suma (o se resta) la misma cantidad, es aritmética: un sueldo que sube 500 pesos al año, una deuda a la que le abonas 1,000 pesos fijos al mes. Si cada periodo se multiplica por el mismo factor, es geométrica: el interés compuesto, la depreciación porcentual, el crecimiento de bacterias. Ejemplo rápido de decisión: una hoja de papel de 0.1 mm de grosor se dobla 10 veces por la mitad. Cada doblez duplica el grosor, así que es geométrica con $r = 2$. Grosor final = $0.1 \cdot 2^{10} = 0.1 \cdot 1,024 = 102.4$ mm, o sea unos 10.24 cm. Diez dobleces convierten una hoja en un bloque de más de 10 cm: el poder de la progresión geométrica.

Comparación directa para que sientas la diferencia: si guardas 1,000 pesos fijos cada mes durante 12 meses, juntas $12 \cdot 1,000 = 12,000$ pesos (progresión aritmética con $d = 1,000$). Pero si inviertes esos 1,000 pesos al 1% mensual con interés compuesto, al final del año tienes $M = 1,000 \cdot (1.01)^{12} = 1,000 \cdot 1.12682503 = 1,126.83$ pesos solo de ese primer depósito, y cada depósito posterior también genera sus propios intereses. El interés compuesto siempre le gana al ahorro plano a largo plazo.

Un truco mental de inversionistas: la regla del 72. Para saber en cuántos años se duplica tu dinero con interés compuesto, divide 72 entre la tasa anual. Al 6% anual, tu dinero se duplica en $72 / 6 = 12$ años. Compruébalo: $(1.06)^{12} = 2.0122$, o sea que 1,000 pesos se convierten en 2,012.20 pesos, prácticamente el doble. Al 9% tardarías $72 / 9 = 8$ años. Entre más alta la tasa, más rápido trabaja la progresión geométrica a tu favor.

14.6 Ejercicios y soluciones

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 14

1. Escribe los primeros 5 términos de cada sucesión:
a) $a_n = 3n - 2$ b) $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$
2. En la P.A. con $a_1 = 12$ y $d = -3$, calcula:
a) el término 15 b) la suma de los 15 primeros términos
3. En una P.A. se sabe que $a_4 = 20$ y $a_{10} = 38$. Halla la diferencia, el primer término y el término 25.
4. En la P.G. con $a_1 = 4$ y $r = 3$, calcula:
a) el término 7 b) la suma de los 7 primeros términos
5. En una P.G. se sabe que $b_2 = 6$ y $b_5 = 48$. Halla la razón, el primer término, el término general y la suma de los 8 primeros términos.
6. Depositas 5,000 pesos en una cuenta que paga 6% anual con interés compuesto. ¿Cuánto tendrás después de 5 años? (Redondea a 2 decimales).
7. Empiezas a ahorrar 100 pesos el primer mes y cada mes aumentas 50 pesos respecto al anterior. ¿Cuánto ahorras en el mes 10 y cuánto juntaste en total al cabo de 10 meses?
8. Un laboratorio empieza con 200 bacterias que se triplican cada hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de 5 horas?
9. Interpola:
a) 5 medios aritméticos entre 4 y 34 b) 2 medios geométricos entre 5 y 135
10. a) Un auto nuevo cuesta 240,000 pesos y se deprecia 12% anual. ¿Cuánto valdrá después de 3 años?
b) Calcula la suma infinita de $12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \dots$

SOLUCIONES

1. a) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10, a_5 = 13$. La sucesión es 1, 4, 7, 10, 13, ...
b) $a_1 = -2, a_2 = 4, a_3 = -8, a_4 = 16, a_5 = -32$. La sucesión es -2, 4, -8, 16, -32, ...
2. a) $a_{15} = 12 + (14)(-3) = 12 - 42 = -30$.
b) $S_{15} = \frac{15}{2} \cdot (12 + (-30)) = \frac{15}{2} \cdot (-18) = 15 \cdot (-9) = -135$.

3. $d = (a_{10} - a_4) / (10 - 4) = (38 - 20) / 6 = 18 / 6 = 3.$

$a_4 = a_1 + 3d$: $20 = a_1 + 9$, de donde $a_1 = 11$. $a_{25} = 11 + (24)(3) = 11 + 72 = 83$.
Comprobación: $a_{10} = 11 + 9(3) = 38$. Correcto.

4. a) $a_7 = 4 \cdot 3^6 = 4 \cdot 729 = 2916.$

b) $S_7 = 4 \cdot (3^7 - 1) / (3 - 1) = 4 \cdot (2,187 - 1) / 2 = 4 \cdot 2,186 / 2 = 4372.$

5. $b_5 = b_2 \cdot r^3$: $48 = 6 \cdot r^3$, de donde $r^3 = 8$ y $r = 2.$

$b_2 = b_1 \cdot r$: $6 = b_1 \cdot 2$, de donde $b_1 = 3$. Término general: $b_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$. $S_8 = 3 \cdot (2^8 - 1) / (2 - 1) = 3 \cdot 255 = 765.$

6. $M = 5,000 \cdot (1.06)^5.$

$(1.06)^2 = 1.1236$; $(1.06)^4 = (1.1236)^2 = 1.26247696$; $(1.06)^5 = (1.26247696)(1.06) = 1.3382255776$. $M = 5,000 \cdot 1.3382255776 = 6,691.13$ pesos. Ganaste 1,691.13 pesos de interés en 5 años.

7. Es una P.A. con $a_1 = 100$ y $d = 50.$

Mes 10: $a_{10} = 100 + (9)(50) = 100 + 450 = 550$ pesos. Total: $S_{10} = 10 / 2 \cdot (100 + 550) = 5 \cdot 650 = 3,250$ pesos.

8. Es una P.G. con $a_1 = 200$ y $r = 3.$

$N = 200 \cdot 3^5 = 200 \cdot 243 = 48,600$ bacterias.

9. a) Al meter 5 medios se forman 6 intervalos: $d = (34 - 4) / 6 = 30 / 6 = 5.$

La progresión es: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34. b) Al meter 2 medios se forman 3 intervalos: $r^3 = 135 / 5 = 27$, de donde $r = 3$. La progresión es: 5, 15, 45, 135. Comprobación: $5 \cdot 3 = 15$, $15 \cdot 3 = 45$, $45 \cdot 3 = 135$. Correcto.

10. a) Cada año conserva el 88% del valor: $V = 240,000 \cdot (0.88)^3.$

$(0.88)^2 = 0.7744$; $(0.7744)(0.88) = 0.681472$. $V = 240,000 \cdot 0.681472 = 163,553.28$ pesos. b)
Es una P.G. infinita con $a_1 = 12$ y $r = 1/2$. $S = 12 / (1 - 1/2) = 12 / (1/2) = 24.$

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 14

- Una sucesión es una lista ordenada de números; el término general a_n te da cualquier término por su posición (cuidado: casi siempre se empieza en $n = 1$), y también hay sucesiones definidas por recurrencia, como la de Fibonacci.
- En una progresión aritmética cada término suma una diferencia fija d : $a_n = a_1 + (n - 1)d$. El signo de d dice si crece, decrece o se queda igual.

- En una progresión geométrica cada término multiplica por una razón fija r : $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$.
- Las sumas rápidas: en la P.A., $S_n = n/2 \times (a_1 + a_n)$; en la P.G., $S_n = a_1 \times (r^n - 1)/(r - 1)$ con r distinto de 1; y si $|r| < 1$ la suma infinita converge.
- Antes de calcular, identifica el patrón: suma fija = aritmética (ahorro con aumentos fijos), multiplicación fija = geométrica (interés compuesto, depreciación).

CAPÍTULO 15: COMBINATORIA Y BINOMIO DE NEWTON

La combinatoria responde una pregunta muy práctica: ¿de cuántas formas se puede hacer algo? Ordenar, elegir, repartir. Si dominas contar bien, dominas probabilidad, estadística y buena parte del álgebra avanzada. Vamos paso a paso.

15.1 Principio de conteo

Hay dos principios que lo explican todo.

Principio de multiplicación. Si una tarea se hace en etapas y la primera etapa tiene m formas de hacerse y la segunda tiene n formas, el total de formas de hacer las dos es m por n . Se extiende a cuantas etapas quieras: multiplicas todas.

Principio de adición. Si tienes que elegir UNA opción entre dos grupos que no se traslapan, y el primero tiene m opciones y el segundo tiene n , el total es m más n . Ojo: aquí se suma porque es "esto O lo otro", no "esto Y lo otro".

Ejemplo 1: Tienes 3 camisas y 4 pantalones. ¿Cuántos atuendos distintos puedes armar? Solución: Cada camisa se combina con cada pantalón. Son dos etapas: elegir camisa (3 formas) y elegir pantalón (4 formas). Total: $3 \times 4 = 12$ atuendos.

Ejemplo 2: Un menú ofrece 2 entradas, 3 platos fuertes y 2 postres. ¿Cuántos menús completos se pueden pedir? Solución: Tres etapas: $2 \times 3 \times 2 = 12$ menús completos.

Ejemplo 3: Una placa tiene 3 letras (26 disponibles) seguidas de 3 dígitos (10 disponibles) y se permite repetir. ¿Cuántas placas distintas existen? Solución: Son 6 etapas. Letras: $26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17,576$. Dígitos: $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1,000$. Total: $17,576 \times 1,000 = 17,576,000$ placas.

Ejemplo 4: Para ir a la escuela puedes tomar 5 rutas de camión o 3 rutas de metro. ¿De cuántas formas puedes ir? Solución: Es "camión O metro", los grupos no se traslapan. Principio de adición: $5 + 3 = 8$ formas.

15.2 Permutaciones

Una permutación es un ordenamiento donde **el orden sí importa**. No es lo mismo quedar en 1o., 2o., 3er. lugar que en 3o., 2o., 1o.

Permutaciones de n objetos tomados de r en r: $P(n, r) = n! / (n - r)! = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$

Casos especiales: $P(n, n) = n!$ (ordenas todos), $P(n, 0) = 1$, $P(n, 1) = n$. Con repetición permitida: n^r . En círculo: $(n - 1)!$ (porque las rotaciones se consideran el mismo orden).

Ejemplo 1: De 5 personas se eligen presidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas formas? Solución: El orden importa (cada puesto es distinto). $P(5, 3) = 5! / 2! = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) / (2 \times 1) = 120 / 2 = 60$ formas. Directo: $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Ejemplo 2: ¿De cuántas formas se pueden ordenar 6 libros distintos en un estante? Solución: Ordenas todos: $P(6, 6) = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ formas.

Ejemplo 3: Una contraseña tiene 4 dígitos y cada dígito puede repetirse. ¿Cuántas contraseñas hay? Solución: Con repetición: $10^4 = 10,000$ contraseñas.

Ejemplo 4: 5 personas se sientan alrededor de una mesa redonda. ¿De cuántas formas? Solución: En círculo las rotaciones cuentan como lo mismo, así que se fija una persona y se permutan las demás: $(5 - 1)! = 4! = 24$ formas.

15.3 Combinaciones

Una combinación es una selección donde **el orden NO importa**. Elegir a Ana, Beto y Carla para un equipo es lo mismo que elegir a Carla, Ana y Beto.

Combinaciones de n objetos tomados de r en r: $C(n, r) = n! / (r!(n - r)!)$

Propiedades útiles: $C(n, 0) = 1$, $C(n, n) = 1$, $C(n, 1) = n$, y la simetría $C(n, r) = C(n, n - r)$. Esa simetría ahorra cuentas: $C(100, 98) = C(100, 2) = 4,950$.

Ejemplo 1: De 10 alumnos se elige un equipo de 3. ¿De cuántas formas? Solución: El orden no importa. $C(10, 3) = 10! / (3! 7!) = (10 \times 9 \times 8) / (3 \times 2 \times 1) = 720 / 6 = 120$ formas.

Ejemplo 2: Un comité lleva 2 hombres elegidos de 6 y 3 mujeres elegidas de 7. ¿Cuántos comités? Solución: Dos selecciones independientes que se multiplican. $C(6, 2) = 15$ y $C(7, 3) = (7 \times 6 \times 5) / 6 = 35$. Total: $15 \times 35 = 525$ comités.

Ejemplo 3: ¿Cuántas manos de 5 cartas hay en una baraja de 52? Solución: $C(52, 5) = 52! / (5! 47!) = (52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48) / 120$. Calculando: $52 \times 51 = 2,652$; $\times 50 = 132,600$; $\times 49 = 6,497,400$; $\times 48 = 311,875,200$; entre 120 = 2,598,960 manos.

Ejemplo 4: Calcula $C(8, 6)$ sin hacer cuentas largas. Solución: Por simetría, $C(8, 6) = C(8, 2) = (8 \times 7) / 2 = 28$.

15.4 Binomio de Newton

El binomio de Newton desarrolla $(a + b)^n$ sin multiplicar a mano. La fórmula:

$$(a + b)^n = C(n, 0)a^n + C(n, 1)a^{(n-1)}b + C(n, 2)a^{(n-2)}b^2 + \dots + C(n, n)b^n$$

O en forma compacta: $(a + b)^n = \text{suma de } k=0 \text{ a } n \text{ de } C(n, k) a^{(n-k)} b^k$.

Tres cosas que siempre se cumplen y te sirven para verificar:

1. Hay $n + 1$ términos.
2. En cada término, los exponentes de a y b suman n .
3. Los coeficientes son los de la fila n del triángulo de Pascal.

Término general: el término número $(k + 1)$ es $T(k+1) = C(n, k) a^{(n-k)} b^k$. Úsalo cuando te pidan "el tercer término" o "el término con x^5 " sin desarrollar todo.

Ejemplo 1: Desarrolla $(x + 2)^4$. Solución: $n = 4$, coeficientes $C(4,0)=1$, $C(4,1)=4$, $C(4,2)=6$, $C(4,3)=4$, $C(4,4)=1$. $(x + 2)^4 = 1(x^4) + 4(x^3)(2) + 6(x^2)(2^2) + 4(x)(2^3) + 1(2^4) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$. Verifica: 5 términos, exponentes suman 4 en cada uno. Bien.

Ejemplo 2: Desarrolla $(x - 3)^3$. Solución: Trata el menos como parte del segundo término: $(x + (-3))^3$. Coeficientes: 1, 3, 3, 1. $= 1(x^3) + 3(x^2)(-3) + 3(x)(-3)^2 + 1(-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$. Los signos alternan porque el segundo término es negativo. Verifica con $(x-3)(x-3)(x-3)$ si dudas: $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, por $(x - 3)$: $x^3 - 6x^2 + 9x - 3x^2 + 18x - 27 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$. Coincide.

Ejemplo 3: Halla el tercer término de $(2x + y)^5$. Solución: Tercer término significa $k = 2$. $T(3) = C(5, 2)(2x)^{(5-2)} y^2 = 10(2x)^3 y^2 = 10(8x^3)y^2 = 80x^3 y^2$.

Ejemplo 4: Desarrolla $(1 - x)^3$. Solución: Coeficientes 1, 3, 3, 1 con segundo término $-x$: $= 1 - 3x + 3x^2 - x^3$.

15.5 Triángulo de Pascal

Es el arreglo de los coeficientes binomiales $C(n, k)$. Se construye facilísimo: cada número es la suma de los dos que tiene arriba.

```

n=0:      1
n=1:     1  1
n=2:    1  2  1
n=3:   1  3  3  1
n=4:  1  4  6  4  1
n=5: 1  5 10 10  5  1
n=6: 1  6 15 20 15  6  1

```

Propiedades que te van a preguntar:

1. La fila n tiene los coeficientes de $(a + b)^n$.
2. La fila es simétrica: se lee igual de izquierda a derecha.
3. Los extremos siempre son 1.
4. La suma de la fila n es 2^n . (Porque $(1 + 1)^n = 2^n$.)
5. La segunda diagonal (1, 2, 3, 4, ...) son los números naturales; la tercera (1, 3, 6, 10, ...) son los números triangulares.

Ejemplo 1: Desarrolla $(x + y)^6$ usando el triángulo. Solución: Fila $n = 6$: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
 $(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$.

Ejemplo 2: ¿Cuánto suman los números de la fila $n = 10$? Solución: Suma = $2^{10} = 1,024$. Sin construir la fila.

Ejemplo 3: Escribe la fila $n = 7$ y verifica que suma 2^7 . Solución: Cada número es la suma de los dos de arriba de la fila 6: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Suma: $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$. Correcto.

15.6 Ejercicios y soluciones

Ejercicio 1. Principio de conteo. a) Tienes 4 camisas, 3 pantalones y 2 pares de zapatos. ¿Cuántos atuendos? b) Para ir al trabajo hay 2 rutas de camión o 4 de metro. ¿De cuántas formas puedes ir? c) ¿Cuántos números de 3 cifras se forman con dígitos del 0 al 9, sin repetir y sin que la primera cifra sea 0?

Ejercicio 2. Permutaciones. a) Calcula $P(7, 3)$. b) ¿De cuántas formas se sientan 5 personas en 5 sillas en fila? c) Una clave de 4 letras (26 disponibles) permite repetir letras. ¿Cuántas claves hay?

Ejercicio 3. Combinaciones. a) Calcula $C(9, 4)$. b) De 12 jugadores se elige un equipo titular de 5. ¿De cuántas formas? c) Un comité lleva 2 hombres elegidos de 5 y 3 mujeres elegidas de 6. ¿Cuántos comités?

Ejercicio 4. Desarrolla $(2x + 1)^4$ con el binomio de Newton.

Ejercicio 5. Desarrolla $(x - 2y)^3$.

Ejercicio 6. Halla el término que contiene x^2 en el desarrollo de $(x + 3)^6$.

Ejercicio 7. Triángulo de Pascal. a) Escribe la fila $n = 7$. b) ¿Cuánto suman los números de la fila $n = 9$? c) ¿Qué número triangular aparece en la fila $n = 6$? (Pista: tercera diagonal, posición $k = 2$.)

Ejercicio 8. Mixto. a) 6 personas se sientan en mesa redonda. ¿De cuántas formas? b) Desarrolla $(a - b)^5$ usando la fila 5 del triángulo. c) ¿De cuántas formas se eligen 2 postres de un menú de 5?

SOLUCIONES

Solución 1. a) Tres etapas: $4 \times 3 \times 2 = 24$ atuendos. b) Es "camión O metro": $2 + 4 = 6$ formas. c) Primera cifra: 9 opciones (1 a 9, el 0 no vale). Segunda: 9 opciones (ya se usó una, pero el 0 ahora sí vale: $10 - 1 = 9$). Tercera: 8 opciones. Total: $9 \times 9 \times 8 = 648$ números.

Solución 2. a) $P(7, 3) = 7 \times 6 \times 5 = 210$. b) Ordenar a las 5: $5! = 120$ formas. c) Con repetición: $26^4 = 456,976$ claves. ($26^2 = 676$, $26^4 = 676^2 = 456,976$.)

Solución 3. a) $C(9, 4) = (9 \times 8 \times 7 \times 6) / 24 = 3,024 / 24 = 126$. b) $C(12, 5) = (12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8) / 120 = 95,040 / 120 = 792$ formas. c) $C(5, 2) = 10$ y $C(6, 3) = 20$. Total: $10 \times 20 = 200$ comités.

Solución 4. Coeficientes de $n = 4$: 1, 4, 6, 4, 1. $(2x + 1)^4 = 1(2x)^4 + 4(2x)^3(1) + 6(2x)^2(1)^2 + 4(2x)(1)^3 + 1 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$. Verificación rápida con $x = 1$: $(3)^4 = 81$ y $16+32+24+8+1 = 81$. Bien.

Solución 5. $(x + (-2y))^3$, coeficientes 1, 3, 3, 1: $= x^3 + 3x^2(-2y) + 3x(-2y)^2 + (-2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$.

Solución 6. Término general: $T(k+1) = C(6, k) x^{6-k} 3^k$. Queremos exponente de x igual a 2: $6 - k = 2$, entonces $k = 4$. $T(5) = C(6, 4) x^2 (3^4) = 15 x^2 (81) = 1,215x^2$.

Solución 7. a) Fila $n = 7$: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. b) Suma $= 2^9 = 512$. c) En la fila $n = 6$, la posición $k = 2$ es $C(6, 2) = 15$, que es el número triangular $1+2+3+4+5 = 15$.

Solución 8. a) En círculo: $(6 - 1)! = 5! = 120$ formas. b) Fila 5: 1, 5, 10, 10, 5, 1; el segundo término es $-b$ y los signos alternan: $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5a b^4 - b^5$. c) $C(5, 2) = 10$ formas.

LO ESENCIAL DEL CAPÍTULO 15

- El principio de multiplicación cuenta tareas por etapas (multiplica las formas de cada etapa) y el principio de adición cuenta opciones que no se traslapan (suma las opciones).
- Si el orden importa, es permutación; si no importa, es combinación. Confundirlos es el error más caro de este capítulo.
- El factorial $n!$ cuenta los ordenamientos de n objetos y es la base de las fórmulas de permutaciones y combinaciones.
- El binomio de Newton desarrolla $(a + b)^n$ sin multiplicar a mano: tiene $n + 1$ términos, los exponentes de a y b suman n en cada término, y los coeficientes salen de $C(n, k)$.
- El triángulo de Pascal te da esos coeficientes de un vistazo: cada número es la suma de los dos que tiene arriba.

REPASO GENERAL

Un barrido por todo el libro. Si dominas estos puntos, dominas el álgebra de este nivel.

Parte I. Fundamentos

Capítulo 1. Los números y sus propiedades

- Los números reales incluyen naturales, enteros, racionales e irracionales; cada operación tiene sus reglas.
- Propiedades clave: conmutativa ($a + b = b + a$), asociativa y distributiva ($a(b + c) = ab + ac$).
- Jerarquía de operaciones: paréntesis, potencias, multiplicación y división, suma y resta.
- Valor absoluto: $|x|$ es la distancia de x al cero, siempre no negativa.
- Los irracionales (como $\sqrt{2}$ o π) no se escriben como fracción exacta.

Capítulo 2. Variables y expresiones algebraicas

- Una expresión algebraica combina números, variables y operaciones; sus partes son términos, coeficientes y exponentes.
- Términos semejantes son los que tienen la misma parte literal: se suman o restan por sus coeficientes.
- Grado de un monomio: suma de los exponentes de sus variables; grado de un polinomio: el mayor grado de sus términos.
- Para sumar o restar polinomios se agrupan términos semejantes; para multiplicar se aplica la distributiva término por término.
- Leyes de los signos: menos por menos da más, y se aplican también al quitar paréntesis.

Capítulo 3. Operaciones con polinomios

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: el término cruzado es el doble producto.
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$: diferencia de cuadrados.
- Factorizar es lo inverso de multiplicar: buscar primero el factor común.
- Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; se reconoce porque dos términos son cuadrados perfectos.

- $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ donde $m + n = b$ y $mn = c$.

Capítulo 4. Factorización

- Una fracción algebraica se simplifica cancelando factores comunes, nunca términos sueltos.
- Para sumar o restar se busca el mínimo común denominador y se convierten las fracciones.
- En la multiplicación se simplifica cruzado antes de multiplicar; en la división se multiplica por el recíproco.
- Las fracciones complejas se resuelven simplificando numerador y denominador por separado.
- Siempre indica las restricciones: el denominador nunca puede ser cero.

Parte II. Ecuaciones e inecuaciones

Capítulo 5. Ecuaciones lineales

- Una ecuación de primer grado tiene la forma $ax + b = 0$ con a distinto de cero; su solución es $x = -b/a$.
- Lo que se hace de un lado se hace del otro: sumar, restar, multiplicar o dividir mantienen la igualdad.
- Con paréntesis primero se quitan (distributiva) y luego se despeja.
- Con fracciones se multiplica todo por el mínimo común denominador para eliminarlas.
- La solución siempre se verifica sustituyendo en la ecuación original.

Capítulo 6. Ecuaciones cuadráticas

- Un sistema 2x2 tiene dos ecuaciones con dos incógnitas; su solución es el punto donde se cruzan las rectas.
- Métodos: sustitución, igualación, suma y resta (eliminación) y determinantes (Cramer).
- Si las rectas son paralelas no hay solución; si coinciden hay infinitas soluciones.
- En Cramer: $x = Dx/D$, $y = Dy/D$, donde D es el determinante del sistema.
- Los problemas de palabras se resuelven definiendo variables, planteando el sistema y verificando.

Capítulo 7. Sistemas de ecuaciones

- Forma estándar: $ax^2 + bx + c = 0$ con a distinto de cero.
- Fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- El discriminante $D = b^2 - 4ac$ dice cuántas soluciones reales hay: $D > 0$ dos, $D = 0$ una (doble), $D < 0$ ninguna real.
- También se resuelve factorizando o completando el cuadrado cuando conviene.
- Si x_1 y x_2 son las raíces: $x_1 + x_2 = -b/a$ y $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

Capítulo 8. Ecuaciones e inecuaciones

- Una inecuación usa $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ en vez del igual; su solución es un conjunto, normalmente un intervalo.
- Al multiplicar o dividir entre un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte. Esta es la regla de oro.
- Las inecuaciones lineales se despejan como ecuaciones, cuidando la regla del signo.
- Las cuadráticas se resuelven hallando las raíces y probando los intervalos que forman.
- La solución se expresa en notación de intervalo y se puede graficar en la recta numérica.

Parte III. Funciones

Capítulo 9. Introducción a las funciones

- a^m por $a^n = a^{(m+n)}$; $(a^m)^n = a^{(mn)}$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = 1/a^n$.
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ y $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ para a, b positivos.
- Para sumar radicales deben tener el mismo índice y el mismo radicando.
- Racionalizar es quitar raíces del denominador multiplicando por el conjugado o la raíz adecuada.
- $\sqrt{a^2} = |a|$: la raíz cuadrada de un cuadrado es el valor absoluto.

Capítulo 10. Funciones polinómicas

- Una función asigna a cada valor de x exactamente un valor de y ; se escribe $y = f(x)$.
- Dominio: valores de x permitidos; rango: valores de y que sí se alcanzan.
- La prueba de la recta vertical: si una recta vertical corta la gráfica más de una vez, no es función.
- $f(a)$ significa evaluar: sustituir x por a en la fórmula.

- Funciones inyectiva, sobreyectiva y biyectiva describen cómo se relacionan dominio y rango.

Capítulo 11. Exponentes y radicales

- Función lineal: $f(x) = mx + b$; m es la pendiente y b la ordenada al origen; su gráfica es una recta.
- Pendiente entre dos puntos: $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$; pendiente positiva sube, negativa baja, cero es horizontal.
- Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$; su gráfica es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$.
- Vértice de la parábola: $x = -b/2a$, $y = f(-b/2a)$; es el mínimo si abre hacia arriba y el máximo si abre hacia abajo.
- Las raíces de la cuadrática son donde la parábola cruza el eje x : se hallan con la fórmula general.

Capítulo 12. Logaritmos

- $\log_b(a) = c$ significa $b^c = a$; el logaritmo es el exponente al que se eleva la base.
- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$; $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$; $\log(a^n) = n \log(a)$.
- Cambio de base: $\log_b(a) = \log(a)/\log(b)$, útil para calcular con calculadora.
- $\log_b(b) = 1$ y $\log_b(1) = 0$ para cualquier base válida.
- Las ecuaciones logarítmicas se resuelven aplicando propiedades hasta dejar un solo logaritmo y luego usando la definición.

Parte IV. Álgebra avanzada

Capítulo 13. Matrices y determinantes

- Una matriz es un arreglo rectangular de números; su orden $m \times n$ indica filas por columnas.
- Suma y resta de matrices: elemento por elemento, solo si tienen el mismo orden.
- Multiplicación: el número de columnas de la primera debe igualar al de filas de la segunda; no es conmutativa.
- Determinante 2×2 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

- Un sistema 2×2 se resuelve con Cramer usando determinantes, y una matriz tiene inversa solo si su determinante es distinto de cero.

Capítulo 14. Progresiones y sucesiones

- En la progresión aritmética cada término se obtiene sumando la diferencia d : $a_n = a_1 + (n-1)d$.
- Suma de los primeros n términos: $S_n = n/2 (a_1 + a_n) = n/2 (2a_1 + (n-1)d)$.
- En la progresión geométrica cada término se obtiene multiplicando por la razón r : $a_n = a_1 r^{(n-1)}$.
- Suma geométrica finita: $S_n = a_1 (r^n - 1)/(r - 1)$ con r distinto de 1.
- Suma geométrica infinita (solo si $|r| < 1$): $S = a_1/(1 - r)$.

Capítulo 15. Combinatoria y binomio de Newton

- Principio de multiplicación: etapas sucesivas se multiplican; principio de adición: opciones excluyentes se suman.
- Permutaciones (el orden importa): $P(n, r) = n!/(n-r)!$; en círculo: $(n-1)!$.
- Combinaciones (el orden no importa): $C(n, r) = n!/(r!(n-r)!)$, con simetría $C(n, r) = C(n, n-r)$.
- Binomio de Newton: $(a + b)^n$ se desarrolla con coeficientes $C(n, k)$; tiene $n + 1$ términos.
- El triángulo de Pascal da los coeficientes y la suma de su fila n es 2^n .

Ejercicios representativos resueltos

Ejercicio de Fundamentos (Capítulo 4). Factoriza $x^2 - 7x + 12$. Solución: Busco dos números que sumen -7 y multipliquen 12 : -3 y -4 . Entonces $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$. Verificación: $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12$. Correcto.

Ejercicio de Ecuaciones (Capítulo 6). Resuelve $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Solución: $a = 2$, $b = -5$, $c = -3$. Discriminante: $D = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$. Como $D > 0$ hay dos soluciones reales. $x = (5 \pm \sqrt{49})/4 = (5 \pm 7)/4$. $x_1 = 12/4 = 3$, $x_2 = -2/4 = -1/2$. Verificación con $x = 3$: $2(9) - 15 - 3 = 18 - 18 = 0$. Con $x = -1/2$: $2(1/4) + 5/2 - 3 = 1/2 + 5/2 - 3 = 0$. Correcto.

Ejercicio de Funciones (Capítulo 9). Halla el vértice de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e indica si es mínimo o máximo. Solución: $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$. x del vértice: $-b/2a = 4/2 = 2$. $y = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$. Vértice: $(2, -1)$. Como $a = 1 > 0$ la parábola abre hacia arriba y el vértice es un mínimo.

Ejercicio de Álgebra avanzada (Capítulo 14). Halla la suma de los primeros 20 términos de la progresión 3, 7, 11, 15, ... Solución: Es aritmética con $a_1 = 3$ y $d = 4$. El término 20: $a_{20} = 3 + 19(4) = 3 + 76 = 79$. Suma: $S_{20} = 20/2 (3 + 79) = 10(82) = 820$.

TABLA DE FÓRMULAS

Todas las fórmulas del libro, agrupadas por tema. Cada una con su nombre para que la ubiques rápido.

Propiedades de los números reales

- Conmutativa de la suma: $a + b = b + a$
- Conmutativa del producto: $ab = ba$
- Asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Asociativa del producto: $(ab)c = a(bc)$
- Distributiva: $a(b + c) = ab + ac$
- Identidad aditiva: $a + 0 = a$
- Identidad multiplicativa: $a \times 1 = a$
- Inverso aditivo: $a + (-a) = 0$
- Inverso multiplicativo: $a \times (1/a) = 1$, con a distinto de cero

Productos notables

- Binomio al cuadrado (suma): $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Binomio al cuadrado (resta): $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Producto de binomios conjugados: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Binomio al cubo (suma): $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3$
- Binomio al cubo (resta): $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3a b^2 - b^3$
- Suma por trinomio (suma de cubos): $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- Resta por trinomio (diferencia de cubos): $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Factorización

- Factor común: $ab + ac = a(b + c)$
- Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- Trinomio cuadrado perfecto (suma): $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- Trinomio cuadrado perfecto (resta): $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$: $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$, donde $m + n = b$ y $mn = c$
- Suma de cubos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- Diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- Factorización por agrupación: $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$

Ecuación cuadrática

- Forma estándar: $ax^2 + bx + c = 0$, con a distinto de cero
- Fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Discriminante: $D = b^2 - 4ac$
- Casos del discriminante: $D > 0$ dos soluciones reales distintas; $D = 0$ una solución real doble; $D < 0$ sin soluciones reales
- Suma de raíces: $x_1 + x_2 = -b/a$
- Producto de raíces: $x_1 \text{ por } x_2 = c/a$

Sistemas de ecuaciones (regla de Cramer 2x2)

- Dado $ax + by = e$, $cx + dy = f$:
- Determinante del sistema: $D = ad - bc$
- Determinante de x : $D_x = ed - bf$
- Determinante de y : $D_y = af - ec$
- Solución: $x = D_x/D$, $y = D_y/D$, válida si D es distinto de cero

Inecuaciones

- Regla de oro del signo: al multiplicar o dividir entre un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte
- Suma y resta: $a < b$ implica $a + c < b + c$ para cualquier c
- Multiplicación por positivo: si $c > 0$, $a < b$ implica $ac < bc$
- Multiplicación por negativo: si $c < 0$, $a < b$ implica $ac > bc$

- Recíprocos positivos: si $0 < a < b$ entonces $1/a > 1/b$

Funciones

- Pendiente entre dos puntos: $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$
- Ecuación punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- Ecuación pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$
- Vértice de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$: $x_v = -b/2a$, $y_v = f(x_v)$
- Forma estándar de la cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Evaluación de funciones: $f(a)$ se obtiene sustituyendo x por a

Exponentes

- Producto de potencias: a^m por $a^n = a^{(m+n)}$
- Cociente de potencias: $a^m / a^n = a^{(m-n)}$, con a distinto de cero
- Potencia de potencia: $(a^m)^n = a^{(mn)}$
- Potencia de un producto: $(ab)^n = a^n b^n$
- Potencia de un cociente: $(a/b)^n = a^n / b^n$
- Exponente cero: $a^0 = 1$, con a distinto de cero
- Exponente negativo: $a^{-n} = 1/a^n$

Radicales

- Raíz de un producto: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$, con a, b no negativos
- Raíz de un cociente: $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$, con a no negativo y b positivo
- Potencia de una raíz: $(\sqrt{a})^2 = a$, con a no negativo
- Raíz de un cuadrado: $\sqrt{a^2} = |a|$
- Raíz n -ésima y exponente fraccionario: $a^{(m/n)} = \sqrt[n]{a^m}$

Logaritmos

- Definición: $\log_b(a) = c$ equivale a $b^c = a$, con $b > 0$, b distinto de 1, $a > 0$

- Logaritmo de un producto: $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- Logaritmo de un cociente: $\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- Logaritmo de una potencia: $\log_b(x^n) = n \log_b(x)$
- Cambio de base: $\log_b(a) = \log(a)/\log(b)$
- Logaritmo de la base: $\log_b(b) = 1$
- Logaritmo de uno: $\log_b(1) = 0$

Matrices

- Determinante 2x2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- Suma de matrices: se suman elemento por elemento (mismo orden)
- Producto por escalar: k por cada elemento de la matriz
- Multiplicación de matrices: $(AB)_{ij} = \text{suma de } a_{ik} \text{ por } b_{kj}$; el orden sí importa

Progresiones

- Término n de la progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1)d$
- Suma de n términos (aritmetica): $S_n = n/2 (a_1 + a_n) = n/2 (2a_1 + (n-1)d)$
- Término n de la progresión geométrica: $a_n = a_1 r^{(n-1)}$
- Suma de n términos (geométrica): $S_n = a_1 (r^n - 1)/(r - 1)$, con r distinto de 1
- Suma geométrica infinita: $S = a_1/(1 - r)$, válida solo si $|r| < 1$

Combinatoria

- Permutaciones de n en r: $P(n, r) = n!/(n-r)!$
- Permutaciones de n objetos: $P(n, n) = n!$
- Permutaciones con repetición: n^r
- Permutaciones circulares: $(n-1)!$
- Combinaciones de n en r: $C(n, r) = n!/(r!(n-r)!)$
- Simetría de combinaciones: $C(n, r) = C(n, n-r)$
- Binomio de Newton: $(a + b)^n = \text{suma de } k=0 \text{ a } n \text{ de } C(n, k) a^{(n-k)} b^k$

- Término general del binomio: $T(k+1) = C(n, k) a^{n-k} b^k$
- Suma de la fila n del triángulo de Pascal: 2^n

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Álgebra. Rama de las matemáticas que usa letras y símbolos para representar números y generalizar operaciones.

Binomio. Expresión algebraica de dos términos, como $x + 3$ o $2a - b$.

Coeficiente. Número que multiplica a la variable en un término; en $5x^2$ el coeficiente es 5.

Combinación. Selección de r objetos de un total de n donde el orden no importa: $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Constante. Valor fijo que no cambia; en $3x + 7$ la constante es 7.

Conjugado. Se obtiene cambiando el signo del segundo término de un binomio; el conjugado de $a + b$ es $a - b$. Sirve para racionalizar.

Cramer (regla de). Método para resolver sistemas lineales usando determinantes: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$.

Cuadrática (ecuación). Ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con a distinto de cero; se resuelve con la fórmula general.

Desigualdad. Relación de orden entre dos expresiones usando $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$.

Determinante. Número asociado a una matriz cuadrada; en 2×2 es $ad - bc$. Si es cero, la matriz no tiene inversa.

Diferencia de cuadrados. Identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, una de las factorizaciones más usadas.

Discriminante. En la cuadrática es $D = b^2 - 4ac$; su signo dice cuántas soluciones reales hay.

Distributiva (propiedad). $a(b + c) = ab + ac$; reparte la multiplicación sobre la suma.

Dominio. Conjunto de valores de x para los que la función está definida.

Ecuación. Igualdad entre dos expresiones que se cumple para ciertos valores de la incógnita.

Eliminación (método de). Técnica para resolver sistemas sumando o restando ecuaciones hasta cancelar una incógnita.

Exponente. Número que indica cuántas veces se multiplica la base por sí misma; en a^3 el exponente es 3.

Expresión algebraica. Combinación de números, variables y operaciones, como $4x^2 - 3x + 1$.

Factor. Cada uno de los elementos que se multiplican; factor común es el que aparece en todos los términos.

Factor común. Elemento (número o variable) que divide a todos los términos de una expresión; lo primero que se busca al factorizar.

Factorización. Escribir una expresión como producto de factores más simples; es lo inverso de multiplicar.

Fracción algebraica. Cociente de dos expresiones algebraicas; se simplifica cancelando factores comunes.

Función. Relación que asigna a cada valor de x exactamente un valor de y ; se escribe $y = f(x)$.

Función cuadrática. Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; su gráfica es una parábola.

Función lineal. Función de la forma $f(x) = mx + b$; su gráfica es una recta con pendiente m .

Gráfica. Representación visual de una ecuación o función en el plano cartesiano.

Identidad. Igualdad que se cumple para todos los valores de la variable, como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Incógnita. Valor desconocido que se busca en una ecuación; normalmente se llama x .

Inecuación. Desigualdad con incógnita; su solución es un conjunto de valores, no un solo número.

Intercepto. Punto donde la gráfica cruza un eje; la ordenada al origen es $f(0)$.

Intervalo. Conjunto de números reales entre dos extremos; se escribe con paréntesis o corchetes.

Logaritmo. $\log_b(a)$ es el exponente al que hay que elevar b para obtener a .

Matriz. Arreglo rectangular de números en filas y columnas; su orden $m \times n$ indica su tamaño.

Máximo. Valor más grande que alcanza una función; en una parábola que abre hacia abajo está en el vértice.

Mínimo. Valor más pequeño que alcanza una función; en una parábola que abre hacia arriba está en el vértice.

Monomio. Expresión de un solo término, como $7x^3$ o $-2ab$.

Orden (de una matriz). Par $m \times n$ que indica cuántas filas y columnas tiene.

Parábola. Curva en forma de U que grafica una función cuadrática; abre hacia arriba si $a > 0$.

Pendiente. Medida de la inclinación de una recta: $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

Permutación. Ordenamiento de r objetos de un total de n donde el orden sí importa: $P(n, r) = n!/(n-r)!$.

Polinomio. Suma de monomios; su grado es el mayor exponente de sus términos.

Potencia. Resultado de elevar una base a un exponente, como a^n .

Producto notable. Multiplicación con forma reconocible cuyo resultado se memoriza, como $(a + b)^2$.

Progresión aritmética. Sucesión donde cada término se obtiene sumando una diferencia constante d .

Progresión geométrica. Sucesión donde cada término se obtiene multiplicando por una razón constante r .

Radical. Expresión con raíz, como $\sqrt{x}$; el índice indica qué raíz es y el radicando es lo de adentro.

Rango. Conjunto de valores de y que una función sí alcanza.

Razón (de una progresión). Constante r por la que se multiplica cada término en una progresión geométrica.

Raíz (de una ecuación). Valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad; también se llama solución o cero.

Recta. Gráfica de una función lineal; queda definida por su pendiente y un punto.

Sistema de ecuaciones. Conjunto de dos o más ecuaciones que se cumplen al mismo tiempo para los mismos valores.

Solución. Valor o valores que satisfacen una ecuación, sistema o inecuación.

Sucesión. Lista ordenada de números donde cada posición tiene su término, como 2, 4, 6, 8, ...

Término. Cada parte de una expresión separada por signos de más o menos.

Término semejante. Términos con la misma parte literal; se pueden sumar o restar entre sí.

Triángulo de Pascal. Arreglo triangular de coeficientes binomiales donde cada número es la suma de los dos de arriba.

Trinomio. Polinomio de tres términos, como $x^2 + 5x + 6$.

Valor absoluto. Distancia de un número al cero en la recta numérica; $|x|$ siempre es no negativo.

Variable. Letra que representa un valor desconocido o que puede cambiar, como x o y .

Vértice. Punto más alto o más bajo de una parábola; se halla con $x = -b/2a$.

Maestro de Álgebra

De Principiante a Experto

Domina el álgebra desde cero hasta nivel experto: números, polinomios, ecuaciones, funciones, logaritmos, matrices y más.

Teoría clara, ejemplos resueltos paso a paso y ejercicios con soluciones.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

